Gabarito da P2, 2012.1

Questão 1

item (a): Em $[0, \pi/2]$ o movimento é descrito por $\mathbf{r}(t)$, com vetor velocidade dado por $\mathbf{r}'(t) = (-2\,\text{sen}2t, 2\cos 2t, 2/\pi)$. No instante $\pi/2$ a partícula está na posição $\mathbf{r}(\pi/2) = (-1, 0, 1)$ e escapa pela tangente com velocidade $\mathbf{r}'(\pi/2) = (0, -2\,, 2/\pi)$. A equação vetorial da reta tangente à trajetória nesse ponto é portanto

$$\beta(s) = (-1, 0, 1) + s(0, -2\,, 2/\pi).$$

item (b): No intervalo $[0, \pi/2]$ a partícula tem velocidade tal que

$$\|\mathbf{r}'(t)\| = \sqrt{4\,\text{sen}^2 2t + 4\cos^2 2t + 4/\pi^2} = \frac{2}{\pi}\sqrt{1+\pi^2}.$$

Assim, a distância percorrida nesse trecho é o comprimento de arco da curva:

$$L_1 = \int_0^{\pi/2} \|\mathbf{r}'(t)\|\, dt = \sqrt{1+\pi^2}.$$

No intervalo $[\pi/2, \pi]$, o movimento é retilíneo uniforme descrito pela curva parametrizada $\beta(s)$, onde o parâmetro s é contado a partir de 0; assim, no instante $t = \pi$, que corresponde a $s = \pi/2$, a partícula está na posição $\beta(\pi/2) = (-1, 0, 1) + (\pi/2)(0, -2\,, 2/\pi) = (-1, -\pi, 2)$. A distância percorrida neste trecho é a distância entre os pontos inicial e final do movimento neste trecho:

$$L_2 = \|(-1, -\pi, 2) - (-1, 0, 1)\| = \sqrt{1+\pi^2}.$$

Logo a distância total percorrida é $L = L_1 + L_2 = 2\sqrt{1+\pi^2}$.

item (c): Pelo Teorema da Energia Cinética, o trabalho neste trecho é a diferença de energia cinética entre os instantes final e inicial. Como $\mathbf{r}'(0) = (0, 2, 2/\pi), \mathbf{r}'(\pi/2) = (0, -2, 2/\pi)$ e lembrando que a partícula tem massa um, segue que o trabalho da força nesse trecho é:

$$W = \frac{1}{2}\big(\|\mathbf{r}'(\pi/2)\|^2 - \|\mathbf{r}'(0)\|^2\big) = 0.$$

Alternativamente, pode-se obter o mesmo resultado calculando explicitamente a integral de linha correspondente.

Questão 2

item (a): As componentes (P, Q) do campo satisfazem $\partial_x Q = 2x - 2y$ enquanto $\partial_y P = -x - 2y$, logo temos $\partial_x Q \neq \partial_y P$, logo o campo não é conservativo em $\mathbb{R}^2$.

item (b): Podemos aplicar o Teorema de Green:

$$\oint_C P\,dx + Q\,dy = \iint_R (\partial_x Q - \partial_y P) dx\,dy = 3\iint_R x dx dy,$$

onde R é a região delimitada pelo quadrado. Mas

$$\iint_R x dx dy = \int_0^1 \Big(\int_0^1 x\,dx\Big) dy = 1/2,$$

logo $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 3/2$.

Alternativamente, pode-se obter o mesmo resultado calculando explicitamente a integral de linha ao longo do perímetro do quadrado.

Questão 3

item (a): FALSA.

A condição necessária e suficiente para que $\mathbf{F}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y)) = (ax + by, cx + dy)$ em $\mathbb{R}^2$ seja conservativo é que

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \Rightarrow c = b.$$

Assim, por exemplo $\mathbf{F}(x, y) = (x + y, 2x + y)$ é um campo linear que não é conservativo.

item (b): VERDADEIRA.

Vimos em sala que $\nabla \times (\varphi \mathbf{F}) = \nabla\varphi \times \mathbf{F} + \varphi \nabla \times \mathbf{F}$. No caso em pauta $\mathbf{F}(x, y, z) = \mathbf{c}$ é um campo constante e portanto tem $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$.

Alternativamente, verifica-se a afirmação calculando $\nabla \times (\varphi\,\mathbf{c})$ explicitamente pela definição.

item (c): VERDADEIRA.

Note que **não** podemos aplicar o Teorema de Green. Mas podemos calcular a integral de linha pela definição, onde $C : \mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t),\ \ 0 \leq t \leq 2\pi$. O resultado é que a integral fica

$$I = -2 \int_0^{2\pi} \cos t\ \sin t \, dt = \int_0^{2\pi} \frac{d \cos^2 t}{dt} \, dt = \cos^2 t|_0^{2\pi} = 0.$$