# PROVA G3 FIS 1033 – 23/11/2011

# MECÂNICA NEWTONIANA

NOME LEGÍVEL: **Gabarito** ______________________ TURMA:_____

ASSINATURA: *Gabarito* ______________________

MATRÍCULA Nº:__________

| QUESTÃO | VALOR | GRAU | REVISÃO |
|---|---|---|---|
| 1 | 1,0 | | |
| 2 | 1,0 | | |
| 3 | 4,0 | | |
| 4 | 4,0 | | |
| TOTAL | 10,0 | | |

Dados:

$K = ½\, m\, v^2$; $W = \mathbf{F} \,.\, \Delta\mathbf{s}$; $W_{cons} = -\Delta U$; $W_{mola} = ½\, k\, x_i^2 - ½\, k\, x_f^2$;

$W_{total} = \Delta K$; $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$; $\mathbf{F}_{med} = \Delta\mathbf{P} / \Delta t$; $\sum \mathbf{F}_{ext} = M\mathbf{a}_{cm}$; $M\mathbf{v}_{cm} = \sum \mathbf{p}_i$;

$K_{rot} = ½\, I\, \omega^2$; $\mathbf{R}_{cm} = \Sigma\, m_i\, \mathbf{r}_i / \Sigma\, m_i$; $\boldsymbol{\tau}_{res} = \Delta\mathbf{L} / \Delta t$;

$\mathbf{P} = m\, \mathbf{v}$; $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$; $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{P} = m\, \mathbf{r} \times \mathbf{v}$; $L_{corpo\ rigido} = I\omega$; $dW_{total} = \tau(\theta)\, .\, d\theta$; $\sum \tau_{ext} = I\boldsymbol{\alpha}$;

Teorema dos eixos paralelos: $I_d = I_{CM} + M\, d^2$

Momentos de Inércia Rotacional:

Massa pontual: $I = MR^2$ Disco/Cilindro (massa M, raio R): $I_{CM} = MR^2/2$

Esfera (massa M, raio R): $I_{CM} = 2MR^2/5$ Esfera oca (massa M, raio R): $I_{CM} = 2MR^2/3$

Aro (massa M, raio R): $I_{CM} = MR^2$ Haste (massa M, comprimento $\ell$) : $I_{CM} = M\ell^2/12$

$\int A\theta^n\, d\theta = A\, \theta^{(n+1)}/ (n+1)$

**A duração da prova é de 1 hora e 50 minutos.**

**Respostas às questões discursivas sem justificativa não serão computadas.**

**Esta prova tem 4 folhas, contando com a capa. Confira.**

**(1ª questão: 1,0 ponto)** Julgue os itens abaixo em verdadeiro ou falso.

I- ( F ) Torque, definido por $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$, representa uma grandeza vetorial que pode ser aplicável a uma partícula que se mova apenas em trajetórias circulares em relação a um ponto fixo, possuindo assim orientação fixa.

II- ( F ) O torque possui seu valor máximo quando a força é aplicada na direção do ponto em torno do qual o corpo é capaz de sofrer rotação.

III- ( F ) Visto que os torques internos de um corpo rígido ocorrem aos pares (ação e reação), um corpo que sofre ação de torques externos tem seu momento angular total (definido por $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{P}$) conservado.

( a ) todas as opções são erradas.

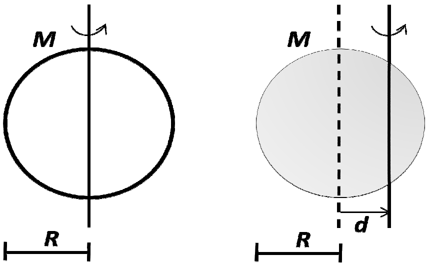
( b ) todas as opções são corretas.

( c ) Apenas a opção I é errada.

( d ) Apenas a opção II é correta.

( e ) Apenas a opção III é correta.

**(2ª questão: 1,0 ponto)** Na figura abaixo são dadas duas esferas de igual massa M e igual raio R, porém a da esquerda é oca (sua massa está toda numa casca esférica de espessura desprezível) e a esfera da direita é maciça (cheia) e homogênea.




A primeira esfera é posta a girar ao redor de um eixo que atravessa um de seus diâmetros. Já a segunda é posta a girar ao redor de um eixo deslocado de uma distância **d** em relação a um de seus diâmetros. É possível, nestas condições, a segunda esfera apresentar um momento de inércia de valor aproximadamente igual ao da primeira?

a) Não, a esfera cheia apresenta maior momento de inércia que a oca já no caso **d = 0**, e deslocar o eixo para mais longe do centro de massa só iria aumentar seu momento de inércia.

b) Sim, mas só quando **d = 0**.

c) Sim, mas só quando **d ≈ R/10**.

d) Sim, mas só quando **d ≈ R/3**.

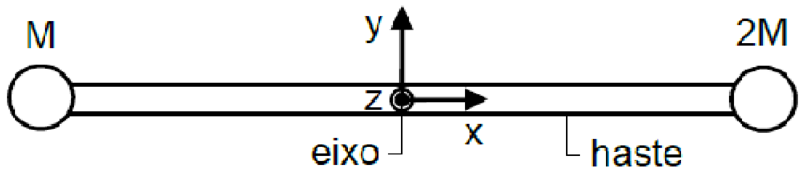
e) Sim, mas só quando **d ≈ R/2**.

$I_{oca}^{CM} = 2/3\ MR^2$; $I_{cheia}^{CM} = 2/5\ MR^2 \quad \rightarrow \quad I_{cheia}^{eixo\ paralelo} = 2/5\ MR^2 + Md^2$.

Queremos impor: $I_{cheia}^{eixo\ paralelo} = I_{oca}^{CM} \quad \rightarrow \quad 2/5\ MR^2 + Md^2 = 2/3\ MR^2$, cuja

solução final fornece: $d = 2/\sqrt{15}\ R \approx 0{,}52\ R$

**(3ª questão: 4,0 pontos)** Um sistema é composto por uma haste de massa M e comprimento L, que está livre para girar em torno de um eixo que passa pelo seu centro de massa, e por duas massas pontuais M e 2M, que se encontram afixadas nas extremidades da haste, conforme mostra a figura. Inicialmente, haste e massas estão em repouso na direção horizontal, quando são liberadas e passam a exercer rotações em torno do eixo Z no sentido horário. Despreze todos os efeitos de atritos e resistência do ar.




a) Determine as coordenadas $X_{cm}$ e $Y_{cm}$ do centro de massa do sistema para a situação descrita.

$X_{cm} = (\Sigma m_i\, x_i)/\Sigma m_i = [M\,(-L/2) + (2M)\,(L/2) + M\,(0)]/(M + 2M + M)$
$X_{cm} = L/8$
$Y_{cm} = 0$ (as massas e a barra estão localizadas em $y_i = 0$)

b)Determine o momento de inércia de rotação associado ao sistema.

$I = I_{barra} + I_M + I_{2M} = M\,L^2/12 + M\,(-L/2)^2 + (2M)\,(L/2)^2$
$I = (5/6)\,ML^2$

c) Determine o vetor torque em relação ao eixo de rotação exercido pela força peso de cada componente do sistema e o vetor torque resultante, indicando sua direção em termos dos vetores unitários de base, conforme indicado na figura.

$\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{barra}} = 0 \times Mg = 0$
$\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{M}} = L/2)\,(-\mathbf{i}) \times Mg\,(-\mathbf{j}) = MgL/2\,(\mathbf{k})$
$\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{2M}} = L/2\,(\mathbf{i}) \times 2Mg\,(-\mathbf{j}) = MgL\,(-\mathbf{k})$

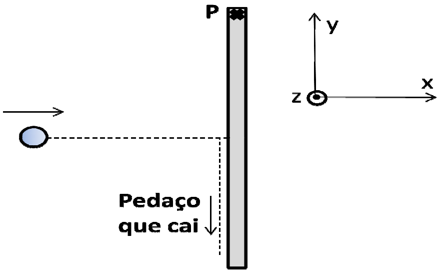
A orientação do torque resultante é dada pela regra da mão direita e este aponta na direção negativa do eixo z (-**k**), ou seja:
$\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{Res}} = \boldsymbol{\tau}_{\mathbf{barra}} + \boldsymbol{\tau}_{\mathbf{M}} + \tau_{2M} = MgL/2\,(-\mathbf{k})$

d) Utilizando conceitos de energia e seu princípio da conservação, determine a velocidade angular da rotação do sistema ao passar pela posição vertical. Poderíamos também utilizar as expressões da cinemática rotacional para calcular a velocidade angular? Justifique.

$W_{sistema} = \Delta K = -\Delta U$
$I\omega^2/2 = -[Mg\,(L/2) + 2Mg\,(-L/2)]$
$(5/6)\,M\,L^2\,\omega^2/2 = Mg\,(L/2)$
$\omega = (6g\,/\,5L)^{1/2}$

Não, as expressões da cinemática só valem para casos onde a aceleração é constante.

**(4ª questão: 4,0 pontos)** A figura mostra uma haste homogênea vertical articulada por um parafuso P, preso em sua extremidade superior e que oferece atrito desprezível. A haste tem massa M = 3,0 kg e comprimento d = 1,0 m. Uma bola de neve de massa m = 600 g viaja em direção à haste e vai atingi-la exatamente em seu centro. No momento da colisão a velocidade da bola de neve é dada pelo vetor $\mathbf{v} = +\,11{,}5$ m/s ($\mathbf{i}$) (ver figura para o sistema de coordenadas).




Como resultado da colisão, a bola se parte em três pedaços de igual massa m/3. O pedaço 1 se gruda à haste, o pedaço 2 se solta, caindo inicialmente com velocidade $\mathbf{v_2} = -\,0{,}3$ m/s ($\mathbf{j}$), e o pedaço 3 sai com velocidade $\mathbf{v_3} = -\,2{,}3$ m/s ($\mathbf{i}$).

a) Calcule, em relação ao ponto P, o vetor momento angular $\mathbf{L_A}$ total do sistema antes da colisão, sabendo que a haste se encontra inicialmente em repouso. Responda ainda se haverá ou não conservação do momento angular total do sistema na colisão, justificando cuidadosamente.

Sim, o momento angular total do sistema é conservado na colisão, uma vez que, apesar de existir uma força externa ao sistema haste + bola de neve (a força do parafuso), esta força provoca torque nulo em relação ao próprio ponto P. (A presença desta força, no entanto, impede a conservação do momento linear.)

$\mathbf{L_A} = \mathbf{L}_{HASTE} + \mathbf{L}_{BOLA} = 0 + \mathbf{r} \times (m\mathbf{v}) = m\,\mathbf{r} \times \mathbf{v} = 0{,}5\,(-\mathbf{j}) \times 0{,}6\ 11{,}5\,(\mathbf{i}) \rightarrow \quad \mathbf{L_A} = 3{,}45$ kg m$^2$/s ($+\mathbf{k}$)

b) Calcule, em relação ao ponto P, os vetores momentos angulares $\mathbf{L_2}$ e $\mathbf{L_3}$ dos pedaços 2 e 3 logo após a colisão.

$\mathbf{L_2} = \mathbf{r} \times (m_2\mathbf{v_2}) = m_2\,\mathbf{r} \times \mathbf{v_2} = 0{,}5\,(-\mathbf{j}) \times 0{,}2\ 0{,}3\,(\mathbf{j}) = 0 \ \rightarrow \quad \mathbf{L_2} = 0$

$\mathbf{L_3} = \mathbf{r} \times (m_3\mathbf{v_3}) = m_3\,\mathbf{r} \times \mathbf{v_3} = 0{,}5\,(-\mathbf{j}) \times 0{,}2\ \ 2{,}3\,(-\mathbf{i}) \ \rightarrow \quad \mathbf{L_3} = 0{,}23$ kg m$^2$/s ($-\mathbf{k}$)

c) Determine o momento de inércia do conjunto haste + pedaço 1.

$I = I_{HASTE} + I_1 = Md^2/3 + m_1(d/2)^2 = 3{,}0\,(1{,}0)^2/3 + 0{,}2\,(1{,}0/2)^2 \rightarrow \ I = 1{,}05$ kg m$^2$

d) Calcule a velocidade angular $\omega$ da haste após a colisão e também a energia cinética de rotação do conjunto haste + pedaço1.

O momento angular total do sistema é conservado. Assim: $\mathbf{L_A} = \mathbf{L_D}$. O momento angular total depois da colisão é assim escrito: $\mathbf{L_D} = \mathbf{L_2} + \mathbf{L_3} + \mathbf{L}_{HASTE\,+\,1}$

Dos itens anteriores: 3,45 ($+\mathbf{k}$) = 0 + 0,23 ($-\mathbf{k}$) + $\mathbf{L}_{HASTE\,+\,1} \rightarrow \ \mathbf{L}_{HASTE\,+\,1} = 3{,}68$ kg m$^2$/s ($+\mathbf{k}$)
Como o conjunto haste + pedaço 1 se comporta como um corpo rígido: $\mathbf{L}_{HASTE\,+\,1} = I\,\boldsymbol{\omega}$
$\rightarrow \quad \boldsymbol{\omega} = 3{,}50$ rad/s ($+\mathbf{k}$)

A energia cinética de rotação do conjunto é dada por: $K_{ROT} = I\,\omega^2/2 \quad \rightarrow \quad K_{ROT} = 6{,}43$ J