Gabarito da P1, 2012.1

Questão 1

Temos que $u(x,y) = f(x^2 - y^2) = f(g(x,y)) = (f \circ g)(x,y)$, onde $g(x,y) = x^2 - y^2$, para $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Portanto temos uma composição de funções diferenciáveis. Aplicando a Regra da Cadeia, temos:

$$\nabla u(x,y) = Df(g(x,y)).\nabla g(x,y) = f'(x^2-y^2)\nabla g(x,y) = f'(x^2-y^2)\big(2x,-2y\big),$$

ou seja

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}(x,y) = f'(x^2-y^2).2x \\ \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,y) = -f'(x^2-y^2).2y. \end{cases}$$

Portanto,

$$y\frac{\partial u}{\partial x} + x\frac{\partial u}{\partial y} = y.f'(x^2-y^2).2x - xf'(x^2-y^2).2y = f'(x^2-y^2).(2xy-2xy) = 0.$$

Questão 2

item (a):

Em $[0,\pi/2]$ o movimento é descrito por $\mathbf{r}(t)$, com vetor velocidade dado por $\mathbf{r}'(t) = (-2\,\text{sen}2t, 2\cos 2t, 2/\pi)$. No instante $\pi/2$ a partícula está na posição $\mathbf{r}(\pi/2) = (-1,0,1)$ e escapa pela tangente com velocidade $\mathbf{r}'(\pi/2) = (0,-2\,,2/\pi)$. A equação vetorial da reta tangente à trajetória nesse ponto é portanto

$$\beta(s) = (-1,0,1) + s(0,-2\,,2/\pi).$$

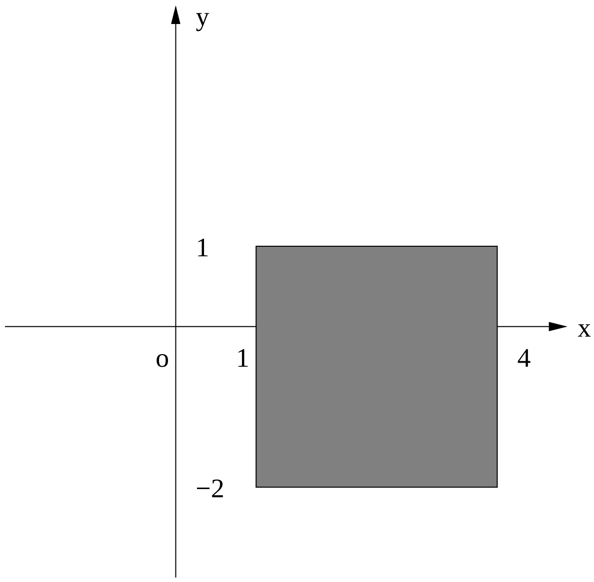
item (b):

No intervalo $[\pi/2,\pi]$, o movimento é retilíneo uniforme descrito pela curva parametrizada $\beta(s)$, onde o parâmetro s é contado a partir de 0; assim, no instante $t = \pi$, que corresponde a $s = \pi/2$, a partícula está na posição $\beta(\pi/2) = (-1,0,1) + (\pi/2)(0,-2\,,2/\pi) = (-1,-\pi,2)$.

Questão 3

item (a):

Resolvendo o sistema $u = x + y, v = x - 2y$, obtemos $x = (2u + v)/3, y = (u - v)/3$, ou seja $(x, y) = T(u, v) = ((2u + v)/3, y = (u - v)/3)$. Sendo uma transformação linear inversível, T^{-1} leva o quadrilátero dado em um quadrilátero de vértices $(1, 1)$, $(4, 1)$, $(1, -2)$, $(4, -2)$, no plano uOv, que é o quadrado $R^* = [1, 4] \times [-2, 1]$.



item (b): A matriz Jacobiana de T é

$$J(u, v) = \begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & -1/3 \end{bmatrix}$$

que tem determinante $-1/3$. Assim, a Fórmula de Mudança de Variáveis se aplica e temos:

$$\iint\limits_R (x + y)^3 \, dx \, dy, = \iint\limits_{R^*} u^3 \, |detJ(u, v)| \, du \, dv = \int_{-2}^{1} \int_{1}^{4} \frac{u^3}{3} \, du \, dv$$

$$= \frac{3}{3} \int_{1}^{4} u^3 \, du = [\frac{u^4}{4}]_1^4 = \frac{255}{4}.$$