Gabarito da P4, 2011.2

Questão 1

Para usar o Teorema de Green, "fechamos"o semi-círculo, C_1, com o segmento orientado C_2 ligando $(-1,0)$ a $(1,0)$ ao longo do eixo Ox.

Agora $C_1 \cup C_2$ é um caminho fechado liso por partes e percorrido no sentido anti-horário, delimitando um semi-disco D. Então, temos:

$$\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_1 \cup C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_D \big(\partial_x Q - \partial_y P\big) dx\, dy$$

$$= \iint dx, dy = A(D) = \frac{\pi}{2}.$$

Mas $C_2 : \mathbf{r}(t) = (t, 0), \quad t \in [-1, 1]$ e portanto:

$$\int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{-1}^{1} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\, dt = \int_{-1}^{1} (2t^2, 1+t) \cdot (1, 0)\, dt$$

$$= \int_{-1}^{1} 2t^2 dt = \frac{4}{3}.$$

Finalmente,

$$\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{3}.$$

Questão 2

Os parabolóides se intersectam no círculo de equação $x^2 + y^2 = 5$, situado no plano $z = 5$. Assim, podemos avaliar a integral de linha usando o Teorema de Stokes, onde a superfície S pode ser tomada como o disco $x^2 + y^2 \leq 5$, situado no plano $z = 5$, que tem como bordo $C = \partial S$.

$$\int_C \mathbf{G} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{G}) \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dS.$$

O versor normal, compatível com a orientação anti-horária, é $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{k}} = (0,0,1)$. Por outro lado,

$$\nabla \times \mathbf{G} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ yz^2 & 2xz & \cos(xyz) \end{vmatrix} = (-xz\sin(xyz) - 2x, yz\sin(xyz) + 2yz, 2z - z^2).$$

Assim, lembrando que em S temos $z = 5$ e que S é um disco de raio $\sqrt{5}$, temos que

$$\iint_S (\nabla \times \mathbf{G}) \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dS = -15A(S_1) = -15\pi(\sqrt{5})^2 = -75\pi.$$

Questão 3

item (a):

Examinamos a fronteira de D:

(I) Se $x = 0, y \in [0,2]$, então $u = 0$, sendo que $y(0,v) = v \in [0,2]$; logo esta aresta do quadrado é imagem do segmento $u = 0, v \in [0,2]$;

(II) Se $x = 1, y \in [0,2]$, então $u = 1$, com $y(1,v) = 2v \in [0,2]$; logo esta aresta é imagem do segmento $u = 1, v \in [0,1]$;

(III) Se $y = v(u+1) = 0$, então $v = 0$ ou $u = -1$, sendo que excluímos esta última pois $u = x(u,v) \in [0,1]$. Logo, esta aresta é imagem do segmento $v = 0, u \in [0,1]$;

(IV) Se $y = v(u+1) = 2$, então $v = \dfrac{2}{1+u}, u \in [0,1]$, que é um arco de hipérbole.

Assim, concluímos que $D^* = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le v \le \dfrac{2}{1+u}, 0 \le u \le 1\}$

item (b): Para usar a fórmula de mudança de variáveis, precisamos calcular o determinante da matriz Jacobiana da transformação:

$$\det J(u,v) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ v & 1+u \end{vmatrix} = 1 + u > 0,$$

lembrando que $u = x(u,v) \in [0,1]$.

Então:

$$\iint_D xy\,dxdy = \iint_{D^*} x(u,v)y(u,v)|\det J(u,v)|\,dudv$$
$$= \int_0^1 \Big(\int_0^{\frac{2}{1+u}} v\,dv\Big)(1+u)^2du = \int_0^1 \Big[\frac{v^2}{2}\Big]_0^{\frac{2}{1+u}}(1+u)^2\,du$$
$$= \int_0^1 \frac{2}{(1+u)^2}(1+u)^2\,du = 2\int_0^1 u\,du = 1.$$

item (c):

Nas coordenadas x, y, temos

$$\iint_D xy\,dxdy = (\int_0^1 xdx)(\int_0^2 ydy) = (1/2).(4/2) = 1.$$

Questão 4

item(a): **FALSO**.

Um campo $\mathbf{F}$ é conservativo em $\mathbb{R}^3$ se, e somente se, $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$. Mas para o campo dado,

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (bz - cy, cx - az, ay - bz),$$

temos que

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ bz - cy & cx - az & ay - bz \end{vmatrix} = (2a, 2b, 2c) = 2\mathbf{A} \neq \mathbf{0}.$$

item(b): **VERDADEIRA**.

Pela Regra da Cadeia, temos:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{f(x-y)}{y} + \dfrac{x\,f'(x-y)}{y} \\[2ex] \dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{x\,f'(x-y)}{y} - \dfrac{x\,f(x-y)}{y^2} \end{cases}$$

Logo,

$$y\,\frac{\partial z}{\partial x}+y\,\frac{\partial z}{\partial y}=f(x-y)+xf'(x-y)-xf'(x-y)-\frac{x\,f(x-y)}{y}=\Big(\frac{y-x}{x}\Big)z.$$