Gabarito da P2, 2011.2

Questão 1

Para acharmos a interseção das superfícies, substituímos $z = x^2 + y^2$ na equação da esfera e obtemos

$$z + z^2 = 2,$$

uma equação do 2o grau com soluções $z = 1$ e $z = -2$. Tomamos $z = 1$, pois para o parabolóide, $z \geq 0$. Assim, a interseção é o círculo $x^2 + y^2 = 1$ situado no plano $z = 1$. O problema então se resume a achar a área do parabolóide $z = x^2 + y^2$, para $0 \leq z \leq 1$.

Usando a parametrização de gráfico, temos $S : \mathbf{r}(x, y) = (x, y, x^2 + y^2)$, com $x^2 + y^2 \leq 1$. O produto vetorial fundamental é

$$\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y = (-2x, -2y, 1).$$

Pela definição de área de superfície:

$$A(S) = \iint_D \|\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y\| dx\, dy = \iint_D \sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)} dx\, dy =$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 \sqrt{1 + 4r^2}\, r\, dr d\theta = \frac{\pi}{4} \int_1^5 \sqrt{v}\, dv = \frac{\pi}{6}[v^{3/2}]_1^5 = \frac{\pi}{6}(5\sqrt{5} - 1).$$

Questão 2

Os parabolóides se intersectam no círculo de equação $x^2 + y^2 = 5$, situado no plano $z = 5$. Assim, podemos avaliar a integral de linha usando o Teorema de Stokes, onde a superfície S pode ser tomada como o disco $x^2 + y^2 \leq 5$, situado no plano $z = 5$, que tem como bordo $C = \partial S$.

$$\int_C \mathbf{G} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{G}) \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dS.$$

O versor normal, compatível com a orientação anti-horária, é $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{k}} = (0,0,1)$. Por outro lado,

$$\nabla \times \mathbf{G} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ yz^2 & 2xz & \cos(xyz) \end{vmatrix} = (-xz\sin(xyz) - 2x, yz\sin(xyz) + 2yz, 2z - z^2).$$

Assim, lembrando que em S temos $z = 5$ e que S é um disco de raio $\sqrt{5}$, temos que

$$\iint_S (\nabla \times \mathbf{G}) \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dS = -15A(S_1) = -15\pi(\sqrt{5})^2 = -75\pi.$$

(OBS: também é possível fazer o cálculo da integral de linha diretamente).

Questão 3

item (a): A S é superfície fechada, lisa por partes, onde S_1 é a superfície do cone invertido de base circular, com vértice na origem e altura $z = 1$, enquanto que S_2 é sua "tampa"(um disco de raio um). Temos que

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dS = \iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}}_1\, dS + \iint_{S_2} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}}_2\, dS.$$

Em S_2, o versor normal apontando para fora é $\hat{\mathbf{n}}_1 = \hat{\mathbf{k}} = (0,0,1)$ e $z = 1$. Assim, $\mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}}_1 = (x,y,1) \cdot (0,0,1) = 1$, e portanto

$$\iint_{S_2} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}}_2\, dS = \iint_{S_2} dS = A(S_2) = \pi.$$

A S_1 pode ser parametrizada como gráfico, $S_1 : \mathbf{r}(x,y) = (x, y, \sqrt{x^2+y^2})$, para $x^2 + y^2 \leq 1$. Então

$$\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y = \big(-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, 1\big),$$

que aponta para *dentro* de S. Assim, devemos usar seu oposto, $-\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y$ no cálculo da integral:

$$\iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}}_1 \, dS = -\iint_D \mathbf{F}(\mathbf{r}(x,y)) \cdot (\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y) \, dxdy$$

$$= -\iint_D (-y, x, \sqrt{x^2+y^2}) \cdot \Big(-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, 1\Big) dxdy = -\iint_D \sqrt{x^2+y^2} dxdy$$

$$= -\int_0^{2\pi} \int_0^1 r^2 dr d\theta = -\frac{2\pi}{3}.$$

Concluímos que

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS = \pi - \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{3}.$$

item (b): Como a superfície é fechada, lisa por partes, podemos usar o Teorema de Gauss; lembrando que para o campo dado $\nabla \cdot \mathbf{F} = 1$, temos:

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS = \iiint_E \nabla \cdot \mathbf{F} \, dV = \iiint_E dV = \iint_D \Big[\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 dz \Big] \, dxdy$$

$$= \iint_D (1 - \sqrt{x^2+y^2}) dxdy = \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1-r) r dr d\theta = 2\pi \int_0^1 (r - r^2) dr =$$

$$2\pi [r^2/2 - r^3/3]_0^1 = 2\pi(1/2 - 1/3) = \pi/3.$$

Questão 4

item(a): **VERDADEIRO**.

Se $\mathbf{F}(x,y,z) = (a,b,c)$, constante, então $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$. Assim, se S é superfície fechada lisa por partes, segue do Teorema de Gauss que

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS = \iiint_E \nabla \cdot \mathbf{F} \, dV = \iiint_E 0 \, dV = 0.$$

item(b): **FALSA**.

A equação dada é $0 = F(x, y, z) = x^3 + 2y^2 + 8xz^2 - 3z^3y - 1$. Note que F é suave, e $F(-1, 1, 0) = 0$. Além disso,

$$\nabla F(x, y, z) = (3x^2 + 8z^2, 4y - 3z^2, 16xz - 9z^2) \Rightarrow \nabla F(-1, 1, 0) = (3, 4, 0).$$

Assim, podemos aplicar o Teorema da Função Implícita para concluir que a equação dada é, localmente na vizinhança de $(-1, 1, 0)$, o gráfico de uma função suave $x = g(y, z)$, tal que $1 = g(1, 0)$ e

$$\nabla g(1, 0) = \Big(- \frac{\partial_y F(-1, 1, 0)}{\partial_x F(-1, 1, 0)}, - \frac{\partial_z F(-1, 1, 0)}{\partial_x F(-1, 1, 0)} \Big) = (-4/3, 0).$$

Assim, a superfície admite plano tangente em $(-1, 1, 0)$ cuja equação cartesiana é

$$x = -1 - (4/3)(y - 1) \Leftrightarrow 3x + 4y - 1 = 0.$$