Gabarito da P2, 2011.2

Questão 1

item (a): Calculando o rotacional do campo:

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ \\ e^y \cos \pi z & xe^y \cos \pi z & -\pi x e^y \text{sen}\, \pi z \end{vmatrix} = \mathbf{0},$$

logo, pelo resultado visto em sala, segue que $\mathbf{F}$ é conservativo em $\mathbb{R}^3$.

item (b): Achamos um potencial $f(x, y, x)$ resolvendo os sistema

$$\begin{cases} \partial_x f = & e^y \cos \pi z \\ \partial_y f = & xe^y \cos \pi z \\ \partial_z f = & -\pi x e^y \text{sen}\, \pi z. \end{cases}$$

Da 1a. equação, $f(x, y, z) = xe^y \cos \pi z + h(y, z)$. Substituindo na 2a. equação, obtemos

$$\partial_y h(y, z) = 0 \Longrightarrow h(y, z) = g(z),$$

e substituindo na 3a. temos $g'(z) = 0 \Longrightarrow g(z) = c$, para $c \in \mathbb{R}$.

Assim, por exemplo, $f(x, y, z) = xe^y \cos \pi z$ é um potencial: $\mathbf{F} = \nabla f$. Aplicando o Teorema Fundamental do Cálculo para Integrais de Linha, segue que:

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = f(\mathbf{r}(\frac{\pi}{2})) - f(\mathbf{r}(0)) = f(0, 5, 0) - f(3, 0, 0) = 0 - 3 = -3.$$

Questão 2

item (a): Temos que

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} - \int_{-C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r},$$

onde $C_1 : \mathbf{r}(t) = (t, t^3), t \in [0,1]$ e $-C_2 : \mathbf{r}(t) = (t,t), t \in [0,1]$, com vetores velocidade, $(1, 3t^2)$ e $(1,1)$, respectivamente.

Pela definição de integral de linha,

$$\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 (t^5, t^3) \cdot (1, 3t^2)\, dt = \int_0^1 4t^5\, dt = 4(t^6/6]_0^1 = 2/3,$$

e

$$\int_{-C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 (t^3, t) \cdot (1,1) dt = \int_0^1 (t^3 + t)\, dt = (t^4/4 + t^2/2]_0^1 = 3/4.$$

Assim,

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \frac{2}{3} - \frac{3}{4} = -\frac{1}{12}.$$

item (b): O Teorema de Green afirma que

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_D (\partial_x Q - \partial_y P) dx dy$$

e calculamos a integral dupla acima na região $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1, x^3 \le y \le x\}$, e onde $\partial_x Q = 0, \partial_y P = x^2$:

$$\int_0^1 \int_{x^3}^x -x^2 dy dx = \int_0^1 (x^5 - x^3) dx = (x^6/6 - x^4/4]_0^1 = -\frac{1}{12}.$$

Questão 3

Por definição

$$\nabla \times \mathbf{F} = (\partial_y R - \partial_z Q, \partial_z P - \partial_x R, \partial_x Q - \partial_y P).$$

Tomando o divergente deste campo, obtemos

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = (\partial^2_{xy} R - \partial^2_{xz} Q) + (\partial^2_{yz} P - \partial^2_{yx} R) + (\partial^2_{zx} Q - \partial^2_{zy} P) = 0,$$

pois, sendo as funções componentes P, Q, R de classe C^2, a ordem das derivadas parciais segundas é irrelevante, ou seja $\partial^2_{xy} R - \partial^2_{yx} R = 0$, $\partial^2_{xz} Q - \partial^2_{zx} Q = 0$ e $\partial^2_{yz} P - \partial^2_{zy} P = 0$.

Questão 4

item(a): **VERDADEIRO**.

Da regra do produto para o rotacional, temos:

$$\nabla \times (\varphi \mathbf{F}) = \varphi \nabla \times \mathbf{F} + (\nabla \varphi) \times \mathbf{F}.$$

Por hipótese, $\varphi F = \nabla f$, logo $\nabla \times (\varphi \mathbf{F}) = \nabla \times (\nabla f) = \mathbf{0}$. Então, como $\varphi \neq 0$, temos

$$\nabla \times \mathbf{F} = -\frac{1}{\varphi}(\nabla \varphi) \times \mathbf{F},$$

logo

$$\mathbf{F} \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = -\frac{1}{\varphi}\mathbf{F} \cdot [(\nabla \varphi) \times \mathbf{F}] = \mathbf{0}.$$

item(b): **VERDADEIRO**.

O campo está definido e é suave na região triangular (triângulo e seu interior). Assim, as hipótese do Teorema de Green são satisfeitas para o campo dado e para o caminho fechado dado, donde

$$\int_{\partial \Delta} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \iint_{\Delta} (\partial_x Q - \partial_y P) dx dy = 0,$$

pois o campo satisfaz $\partial_x Q(x, y) = \partial_y P(x, y)$, para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$, logo em particular na região triangular Δ.