Gabarito da P1, 2011.2

Questão 1

Temos que
$$\nabla z = \nabla \frac{f(x-y)}{y} = \nabla \frac{f(g(x,y))}{y},$$
onde $g(x,y) = x - y$. Pela Regra da Cadeia, lembrando que f é função escalar, temos que: $\nabla f(g(x,y)) = f'(g(x,y)).\nabla g(x,y) = f'(x-y)(1,-1)$. Portanto,
$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{\partial}{\partial x}(\dfrac{f(x-y)}{y}) = \dfrac{1}{y}\dfrac{\partial}{\partial x} f(g(x,y)) = \dfrac{f'(x-y)}{y} \\ \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{f(x-y)}{y^2} + \dfrac{1}{y}\dfrac{\partial}{\partial y} f(g(x,y)) = -\dfrac{f(x-y)}{y^2} - \dfrac{1}{y} f'(x-y) \end{cases}.$$
Portanto,
$$y\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = f'(x-y) - \frac{f(x-y)}{y} - f'(x-y) = -\frac{f(x-y)}{y} = -z.$$

Questão 2

Temos que $(1,0,1) = \mathbf{r}(0)$ e $(0, e^{\pi/2}, e^{\pi/2}) = \mathbf{r}(\pi/2)$ logo $t \in [0, \pi/2]$. O vetor velocidade é dado por $\mathbf{r}'(t) = (e^t(\cos t - \operatorname{sen} t), e^t(\operatorname{sen} t + \cos t), e^t)$ e portanto
$$||\mathbf{r}'(t)|| = e^t\sqrt{(\cos t - \operatorname{sen} t)^2 + (\operatorname{sen} t + \cos t)^2 + 1} = \sqrt{3}e^t.$$
Assim, o comprimento de arco é
$$l(C) = \int_0^{\pi/2} ||\mathbf{r}'(t)|| dt = \sqrt{3}\int_0^{\pi/2} e^t dt = \sqrt{3}(e^{\pi/2} - 1) = L_1.$$

No intervalo $[\pi/2, \pi]$, o movimento é retilíneo uniforme com velocidade constante $\mathbf{v} = \mathbf{r}'(\pi/2) = (-e^{\pi/2}, e^{\pi/2}, e^{\pi/2})$ de forma que a posição da partícula no instante $t \in [\pi/2, \pi]$ é dada por $\mathbf{R}(t) = \mathbf{r}(\pi/2) + (t - \pi/2)\mathbf{v}$. Assim, a distância percorrida nesse trecho é dada por

$$L_2 = \|\mathbf{R}(\pi) - \mathbf{r}(\pi/2)\| = \|(\pi/2)\mathbf{v}\| = (\pi/2)\|(-e^{\pi/2}, e^{\pi/2}, e^{\pi/2})\| = \frac{\sqrt{3}\pi}{2} e^{\pi/2}.$$

Finalmente, a distância total percorrida em $[0, \pi]$ é

$$L_1 + L_2 = \sqrt{3}(e^{\pi/2} - 1) + \frac{\sqrt{3}\pi}{2} e^{\pi/2}$$

.

Questão 3

item (a): É natural propor a mudança de variáveis linear $(u, v) = (x-y, x+y)$ ou $(x, y) = T(u, v) = (\frac{u+v}{2}, \frac{-u+v}{2})$.

item (b): A matriz Jacobiana de T é

$$\begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

que tem determinante $1/2 > 0$, logo é T.L. inversível e leva retas em retas; logo $R = T(R^*)$, onde R^* é o paralelogramo de vértices $(-\pi, \pi)$, (π, π), $(\pi, 3\pi)$ e $(-\pi, 3\pi)$, ou seja $R^* = [-\pi, \pi] \times [\pi, 3\pi]$

item (c): Pela fórmula de mudança de variáveis:

$$\begin{aligned}\iint\limits_{R} (x-y)^2 \operatorname{sen}^2(x+y) dx dy &= \frac{1}{2} \iint\limits_{R^*} u^2 \operatorname{sen}^2 v du dv \\ &= \frac{1}{2}\Big(\int_{-\pi}^{\pi} u^2\, du\Big).\Big(\int_{\pi}^{3\pi} \operatorname{sen}^2 v\, dv\Big).\end{aligned}$$

Agora,

$$\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} u^2\, du = \frac{\pi^3}{3},$$

e

$$\int_{\pi}^{3\pi} \operatorname{sen}^2 v\, dv = \frac{1}{2}\int_{\pi}^{3\pi} (1 - \cos 2v)\, dv = \pi.$$

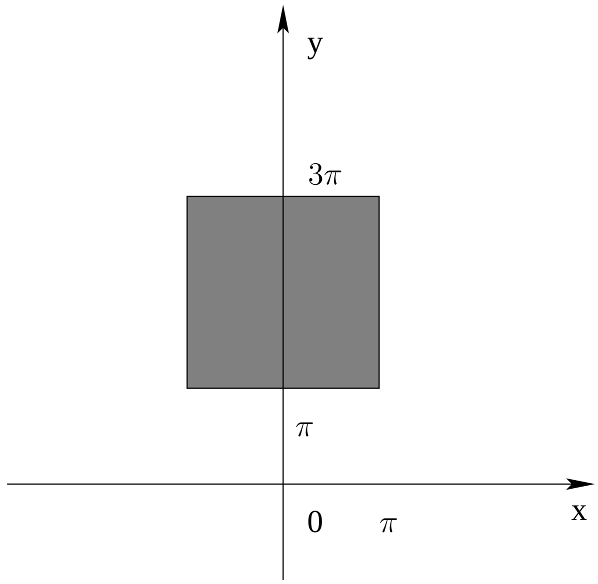

Figura 1:

Finalmente,

$$\iint\limits_R (x-y)^2 \operatorname{sen}^2(x+y)dxdy = \frac{\pi^4}{3}.$$

Questão 4

item(a): **VERDADEIRO**. A integral de linha é a soma de três termos. No trecho $C_1 : (0,0) \to (0,1)$, temos $\mathbf{r}(t) = (t,0),\ t \in [0,1]$. No trecho $C_2 : (0,1) \to (1,0)$, temos $\mathbf{r}(t) = (1-t,t),\ t \in [0,1]$. No trecho $C_3 : (1,0) \to (0,0)$, temos $\mathbf{r}() = (0,1-t),\ t \in [0,1]$.

Logo

$$\int_C (x+y)ds = \int_{C_1} (x+y)ds + \int_{C_2} (x+y)ds + \int_{C_3} (x+y)ds =$$
$$\int_0^1 t\,dt + \int_0^1 \sqrt{2}dt + \int_0^1 (1-t)dt = 1/2 + \sqrt{2} + 1/2 = 1 + \sqrt{2}.$$

item(b): **VERDADEIRO**.

A derivada de F é,

$$DF(x,y) = \begin{bmatrix} \dfrac{3x^4 - y^4}{x^2} & \dfrac{4y^3}{x} \\ \\ \cos x & -\sin y \end{bmatrix}$$

e portanto

$$\det DF(\pi,\pi) = \begin{vmatrix} 2\pi^2 & 4\pi^2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 4\pi^2 \neq 0.$$

Logo, pelo Teorema da Função Inversa, segue que existe uma vizinhança de (π,π) na qual F é inversível.