GABARITO - LISTA 1 DE SÉRIES

1-A- Pelo teste da integral temos:

$$\int_1^\infty \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx \qquad e^x = u \qquad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = u \quad \Rightarrow dx = \frac{du}{u}$$

$$\int_1^\infty \frac{u}{1+u^2}.\frac{du}{u} = \int_1^\infty \frac{1}{1+u^2}du \quad = arctg(u) = arctg(e^x)|_1^\infty$$

$$\int_1^\infty \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx = Lim_{x\to\infty} arctg(e^x) - arctg(e)$$

$$\frac{\pi}{2} - arctg(e)$$

Uma vez que o valor da integral é um valor finito, a série converge.

Resolução alternativa:

Teste da razão:

$$Lim_{n\to\infty} \quad \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \quad = L$$

$$L = Lim_{n\to\infty} \quad \left|\left(\frac{e^{n+1}}{e^n}\right)\left(\frac{1+e^{2n}}{1+e^{2n+2}}\right)\right|$$

Dividindo o numerador e denominador da segunda fração por e^(2n), temos:

$$L = Lim_{n\to\infty} \quad \left|e\left(\frac{\frac{1}{e^{2n}}+1}{\frac{1}{e^{2n}}+e^2}\right)\right| \quad = \quad \frac{1}{e}$$

Uma vez que L< 1, a série é absolutamente convergente.

1-B- Teste da comparação direta:

É trivial que:

$$\frac{ln(n)}{\sqrt{n}} \geqslant \frac{1}{2n} \quad \forall n$$

Uma vez que a série usada na comparação é divergente, a primeira série também o é.

1-C- Resolução alternativa:

Teste da comparação direta:

$$\frac{1}{\sqrt{n}(\sqrt{n}+1)} = \frac{1}{n+\sqrt{n}}$$

$$n + \sqrt{n} \leq 2n \quad \forall n$$

Logo:

$$\frac{1}{\sqrt{n}(\sqrt{n}+1)} \geqslant \frac{1}{2n} \quad \forall n$$

Uma vez que a série usada na comparação é divergente, a primeira série também o é.

Resolução do gabarito:

Teste da integral:

$$\frac{1}{\sqrt{n}(\sqrt{n}+1)} = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n}+1}$$

$$\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}dx - \int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}+1}dx \qquad \sqrt{x} = u$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{2u} \qquad \Rightarrow \qquad dx = 2u.du$$

$$\int_1^\infty 2.du - 2\int_1^\infty \frac{u}{u+1}du \qquad \frac{u}{u+1} = 1 - \frac{1}{u+1}$$

$$\int_1^\infty 2.du - \int_1^\infty 2.du \quad + \quad 2\int_1^\infty \frac{1}{u+1}du \quad =$$

$$Lim_{x\to\infty} \quad 2.ln(\sqrt{x}+1) - 2.ln(2) \ = \ \infty$$

Uma vez que a integral diverge, a série é divergente.

1-D- Teste da integral:

$$ln(x) = u \qquad \frac{du}{dx} = \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad dx = du.x$$

$$\int_1^\infty \frac{1}{x(1+ln^2(x))}dx \quad = \quad \int_1^\infty \frac{x}{x(1+u^2)}du \quad =$$

$$\int_1^\infty \frac{1}{1+u^2}du \quad = \quad Lim_{x\to\infty} \quad arctg(ln(x)) \quad = \frac{\pi}{2}$$

Uma vez que a integral possui um valor finito, a série é convergente.

GABARITO - LISTA 1 DE SÉRIES (PARTE 2)

1-E- Teste da comparação direta:

$$-1 \leqslant sen(n) \leqslant 1 \quad \Rightarrow \quad 0 \leqslant sen^2(n) \leqslant 1$$

$$0 \leqslant \frac{sen^2(n)}{2^n} \leqslant \frac{1}{2^n} \qquad \forall n$$

A série mais à direita representa o termo geral de uma P.G. de razão 1/2, sendo assim sabe-se que a mesma é convergente. Logo, a série do enunciado também o é.

1-F- Teste da raiz:

$$Lim_{n\to\infty} \quad \left| \left(\frac{n}{3n+1} \right)^n \right|^{1/n} = L$$

$$L = \; Lim_{n\to\infty} \quad \left| \frac{n}{3n+1} \right| \; = \frac{1}{3}$$

L<1, logo a série é (absolutamente) convergente.

1-G- Teste da comparação direta:

É trivial que:

$$\frac{3}{n+\sqrt{n}} \geqslant \frac{3}{2n} \qquad \forall n$$

Uma vez que a série utilizada na comparação é divergente, a primeira série também o é.

1-H- Teste da comparação direta:

$$-1 \leqslant cos(n) \leqslant 1 \;\Rightarrow \quad 0 \leqslant \frac{1+cos(n)}{n^2} \leqslant \frac{2}{n^2} \quad \forall n$$

Agora precisamos checar se a série mais à direita é convergente. Se for, a série do enunciado também será. Utilizaremos o teste da integral:

$$\int_1^\infty \frac{2}{x^2} dx \;\; = \;\; 2$$

Visto que tal série é convergente e maior que a série do enunciado para todo n, está provado, por comparação direta, que a série cuja análise é requisitada é convergente.

1-I- Teste da comparação no limite:

$$Lim_{n\to\infty} \quad \frac{\frac{1}{ln^2(n)}}{1/n} = +\infty$$

Uma vez que a série do denominador diverge, a do numerador também deve divergir.

1-J- Teste da comparação no limite:

$$Lim_{n\to\infty} \quad \frac{\frac{ln^2(n)}{n^3}}{\frac{1}{n^2}} = 0$$

Uma vez que a série do denominador converge, a do numerador também deve divergir.

1-K- Teste da razão:

$$Lim_{n\to\infty} \quad \left|\left(\frac{n+1}{n}\right)^{\sqrt{2}}\left(\frac{2^n}{2^{n+1}}\right)\right| = \left|1^{\sqrt{2}}.\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$$

Sendo a razão menor do que 1, a série é (absolutamente) convergente.

1-L- Teste da razão:

$$Lim_{n\to\infty} \quad \left|\left(\frac{(n+1)!}{n!}\right)\left(\frac{e^n}{e^{n+1}}\right)\right| =$$

$$Lim_{n\to\infty} \quad \left|\frac{n+1}{e}\right| = +\infty$$

Já que L vale infinito, a série diverge.

1-M- Teste da razão:

$$Lim_{n\to\infty} \left|\left(\frac{n+1}{n}\right)^2\left(\frac{e^n}{e^{n+1}}\right)\right| = \frac{1}{e}$$

Sendo L menor do que 1, a série é (absolutamente) convergente.

1-N- Teste da raiz:

$$Lim_{n\to\infty} \left|\left(\frac{ln(n)}{n}\right)^n\right|^{1/n} = L =$$

$$Lim_{n\to\infty} \left|\frac{ln(n)}{n}\right|$$

Por L'Hôspital:

$$L = Lim_{n\to\infty} \left|\frac{1}{n}\right| = 0$$

L<1, logo a série converge (absolutamente).

1-P- Teste da raiz:

$$Lim_{n\to\infty} \left|\frac{n-1}{n^2}\right| = L$$

Por L'Hôspital:

$$L = Lim_{n\to\infty} \left|\frac{1}{2n}\right| = 0$$

L< 1, logo a série é (absolutamente) convergente.

GABARITO - LISTA 1 DE SÉRIES (PARTE 3)

Primeiramente, gostaríamos de pedir desculpas por pequenos erros no gabarito anterior:

E1 - QUESTÃO 1.J-

A justificativa correta é que, assim como a série do denominador converge, a do numerador também deve CONVERGIR.

E2- QUESTÃO 1.N--

A solução mostrada nesse item é, na verdade, do item 1.O. A solução do item 1.N será apresentada posteriormente.

Justificados os erros, prosseguiremos com o gabarito:

1-N- Teste da razão:

$$Lim_{n\to\infty} \quad \left|\left(\frac{n+1}{n}\right)^{10}\left(\frac{10^n}{10^{n+1}}\right)\right| \quad = \frac{1}{10}$$

Uma vez que L<1, a série é (absolutamente) convergente.

1-Q- Teste da razão:

$$Lim_{n\to\infty} \quad \left|\left(\frac{n+1}{n}\right)\left(\frac{ln(n)}{ln(n+1)}\right)^n \frac{1}{ln(n+1)}\right| =$$

$$Lim_{n\to\infty} \quad \left|\frac{1^n}{ln(n+1)}\right| \quad = 0$$

L<1, logo a série é (absolutamente) convergente.

1-R- Teste da raiz:

$$Lim_{n\to\infty} \left|\frac{n!}{n^2}\right| = Lim_{n\to\infty} \quad \left|\left(\frac{n-1}{n}\right)(n-2)!\right| \quad = +\infty$$

Já que L é infinito, a série é divergente.

2-A- Teste da razão:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(\frac{1 + sen(n)}{n}\right)$$

$$Lim_{n\to\infty} \quad \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 0$$

Uma vez que L<1, a série é (absolutamente) convergente.

2-B- Teste da razão:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3n-1}{2n+5}$$

$$Lim_{n\to\infty} \quad \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{3}{2}$$

L>1, logo a série é divergente.

2-C- Teste do n-ésimo termo:

$$a_2 = \frac{1}{3} \qquad a_3 = \sqrt{\frac{1}{3}} = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad a_4 = \sqrt[3]{\sqrt{\frac{1}{3}}} = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2.3}}$$

Seguindo este raciocínio, vemos que:

$$a_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{(n-1)!}}$$

Logo: $Lim_{n\to\infty} \; a_n = 1$

Já que o limite do n-ésimo termo é diferente de zero, a série diverge.

A justificativa para isso é que, quando n é suficientemente grande, a(n) sempre valerá 1 (ou um valor incrivelmente próximo). E, a cada parcela, o valor se aproximará mais de 1. Sendo assim, a partir de um n suficientemente grande, teremos mais infinitas parcelas cujo valor é (quaaaaase) 1. Logo, quando somadas, fazem a série divergir, tendendo ao infinito.

3- Uma vez que a série dada possui apenas termos não-negativos, é trivial que:

$$\frac{a_n}{n} \leqslant a_n \quad \forall n$$

Por comparação direta, uma vez que a série à direita é convergente, a série à esquerda também é.

Resolução alternativa: Teste da comparação no limite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{a_n}{n}}{a_n} = 0$$

Uma vez que a série do denominador é convergente, a série do numerador também deve ser convergente.

GABARITO - LISTA 1 DE SÉRIES (PARTE 4)

4-A- Teste da série alternada:

$$\frac{1}{n^2} \geqslant \frac{1}{(n+1)^2} \qquad \forall n$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$$

Uma vez que a série obedece ambas as condições determinadas pelo teste, ela é convergente.

4-B- Teste da série alternada:

Checando apenas o limite de a(n) quando n tende ao infinito, vemos que:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{10}\right)^n = +\infty$$

Logo, a série não obedece à segunda condição do teste, o que é suficiente para que a caracterizemos como divergente.

Resolução alternativa: Teste da raiz

Apesar do teste da série alternada só poder ser usado, obviamente, em séries alternadas, nada impede que um outro método seja utilizado, afinal o teste da raíz, por exemplo, é aplicável em qualquer série, incluindo as alternadas.

$$L = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{n}{10}\right| = +\infty$$

Já que L vale infinito, a série é divergente.

4-C- Teste da série alternada:

$$\frac{1}{ln(n)} \geqslant \frac{1}{ln(n+1)} \qquad \forall n$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{ln(n)} = 0$$

Logo, a série é convergente.

4-D- Teste da série alternada:

Podemos checar apenas o limite de a(n) quando n tende ao infinito:

$$L = \lim_{n \to \infty} \frac{ln(n)}{ln(n^2)}$$

Por L'Hôspital:

$$L = \lim_{n \to \infty} \frac{\frac{1}{n}}{2n.\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{2}$$

Uma vez que o limite é diferente de 0, a série é divergente.

4-E- Teste da série alternada:

$$\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} \geqslant \frac{1}{(n+1)^{\frac{3}{2}}} \qquad \forall n$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} = 0$$

Logo, a série é convergente.

4-F- Teste da série alternada:

$$\frac{ln(n)}{n} \geqslant \frac{ln(n+1)}{n+1} \qquad \forall n$$

Isso porque, ao passo que o numerador cresce linearmente (com uma derivada constante igual a 1), o numerador cresce, obviamente, logaritmicamente (com uma derivada igual a 1/n, o que indica que sua taxa de crescimento diminui ao passo que n aumenta). Logo, o denominador cresce com uma "velocidade" maior que o denominador, o que justifica a afirmação acima.

$$L = \lim_{n \to \infty} \frac{ln(n)}{n}$$

Por L'Hôspital:

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{1} = 0$$

Logo, uma vez que a série satisfaz ambas as condições do teste para que seja convergente, ela o é.

GABARITO - LISTA 1 DE SÉRIES (PARTE 5)

5- Para essa questão, temos que conhecer a diferença entre convergência absoluta e condicional. Convergência absoluta é quando a série dos módulos da série dada é convergente (o que implica no fato da série em si também o ser), o que pode ser verificado usando, principalmente, os testes da raiz e da razão (outros testes podem ser usados). Convergência condicional é quando a série é convergente, porém a série de seus módulos não o é.

5-A- Teste da raiz:

Podemos ignorar a potência de -1, uma vez que o teste da razão avalia um módulo (o módulo de qualquer potência de -1 é 1, que é o elemento nulo da operação de multiplicação, logo não interfere na mesma).

$$L = \lim_{n \to \infty} |(0,1)^n|^{\frac{1}{n}} = 0,1$$

Já que L< 1, a série é absolutamente convergente.

5-B- Utilizaremos o teste da integral na série dos módulos para verificarmos se esta é convergente:

$$\frac{d(\sqrt{x+1})}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$$

$$2.d\left(\sqrt{x+1}\right) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}dx$$

$$2\int d\left(\sqrt{x+1}\right) = \int \frac{1}{\sqrt{x+1}}dx$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x+1}}dx = 2\sqrt{x+1}$$

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1}}dx = +\infty$$

Vemos então que a série dos módulos é divergente. Agora utilizaremos o teste da série alternada para verificar a convergência da série em si:

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}} \geqslant \frac{1}{\sqrt{n+2}} \qquad \forall n$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}} = 0$$

Vemos então que a série é convergente, porém a série dos módulos não o é. Logo, a série possui convergência condicional.

5-C- Teste da razão:

$$L = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n}{n^3+1} \right|$$

Por L'Hôspital:

$$L = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{1}{3n^2+1} \right| = 0$$

Logo, a série converge absolutamente.

5-D- Verificaremos se a série dos módulos é convergente, usando o teste da integral:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x+3}dx = \lim_{x\to\infty} ln(x+3) - ln(1) = +\infty$$

Sendo assim a série dos módulos é divergente. Utilizaremos agora o teste da série alternada:

$$\frac{1}{n+3} \geqslant \frac{1}{n+4} \qquad \forall n$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+3} = 0$$

Vemos então que a série em si é convergente. Logo, a série possui convergência condicional.

5-E- Teste do n-ésimo termo:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3+n}{5+n} = 1$$

(Justificativa por L'Hôspital ou dividindo o numerador e denominador por "n")

Logo, uma vez que o n-ésimo termo não tende a 0, a série é divergente.

5-F- Aplicaremos o teste da comparação direta na série dos módulos:

$$-1 \leqslant sen(n) \leqslant 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{-1}{n^2} \leqslant \frac{sen(n)}{n^2} \leqslant \frac{1}{n^2}$$

Visto que a série mais à direita é convergente, sabemos que a série dos módulos é convergente. Sendo assim, a série possui convergência absoluta.

5-G- Teste da razão:

$$L = \lim_{n\to\infty} \left| \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{\left(\frac{2}{3}\right)^n} \right| = \frac{2}{3}$$

Uma vez que L< 1, a série é absolutamente convergente.

5-H- Teste da razão:

$$L = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{100^{n+1}}{100^n} \frac{n!}{(n+1)!} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{100}{n+1} \right| = 0$$

Já que L<1, a série é absolutamente convergente.

5-I- Utilizaremos o teste da comparação no limite para a série dos módulos:

$$n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 = 1$$

Uma vez que a série do denominador converge e o limite é uma constante de valor finito e maior que 0, é obrigatório que a série do numerador também convirja. Sendo assim, uma vez que a série dos módulos converge, a série em si é absolutamente convergente.

5-J- É válido notarmos que, com a variação de n, o cosseno será sempre 1 ou -1, uma vez que sempre teremos o cosseno de um valor múltiplo de “pi”. Logo:

$$\left|\frac{cos(n\pi)}{n\sqrt{n}}\right| = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Uma vez que a série dos módulos é uma “série-p” com p = 3/2, ou seja, p>1, sabemos que a série do módulos é convergente. Sendo assim, a série em si é absolutamente convergente.

5-K- Teste da raiz:

$$L = \lim_{n\to\infty}\left|\left(\frac{n+1}{2n}\right)\right| = \frac{1}{2}$$

Uma vez que L<1, a série é absolutamente convergente.