1.9 2^a Série de exercícios

1. Séries de termos não negativos - Quais das séries a seguir convergem e quais divergem? Lembre-se de que pode existir mais de uma forma de determinar a convergência ou a divergência de uma série. Utilize o teste que achar mais adequado.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{1+e^{2n}}$

b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}(\sqrt{n}+1)}$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n[1+\ln^2(n)]}$

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen}^2(n)}{2^n}$

f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{3n+1}\right)^n$

g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n+\sqrt{n}}$

h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\cos(n)}{n^2}$

i) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln^2(n)}$

j) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^2(n)}{n^3}$

k) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{\sqrt{2}}}{2^n}$

l) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n!e^{-n}$

m) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-n}$

n) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{10}}{10^n}$

o) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{[\ln(n)]^n}{n^n}$

p) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)^n$

q) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{[\ln(n)]^n}$

r) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^n}{(n^n)^2}$

2. Quais das séries $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ definidas pelas fórmulas a seguir convergem e quais divergem?

a) $a_1 = 2,\ a_{n+1} = \dfrac{1+\text{sen}(n)}{n} a_n$

b) $a_1 = \dfrac{1}{3},\ a_{n+1} = \dfrac{3n-1}{2n+5} a_n$

c) $a_1 = \frac{1}{3}$, $a_{n+1} = \sqrt[n]{a_n}$

3. Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é uma série convergente de termos não negativos, pode-se dizer algo sobre $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$? Justifique.

4. Séries alternadas - Quais das séries alternadas a seguir convergem e quais divergem?

a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{n}{10}\right)^n$

c) $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\ln(n)}$

d) $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\ln(n)}{\ln(n^2)}$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$

f) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\ln(n)}{n}$

5. Convergência absoluta x convergência condicional - Quais das séries a seguir convergem absolutamente, quais convergem condicionalmente e quais divergem?

a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} (0,1)^n$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n+1}}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{n^3+1}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n+3}$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{3+n}{5+n}$

f) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\text{sen}(n)}{n^2}$

g) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^2 \left(\frac{2}{3}\right)^n$

h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-100)^n}{n!}$

i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2+2n+1}$

j) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{n\sqrt{n}}$

k) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(n+1)^n}{(2n)^n}$

1.10 Respostas da 2^a série de exercícios

1.
a) De acordo com o teste da integral, a série converge.
b) De acordo com o teste da comparação direta, a série diverge.
c) De acordo com o teste da integral, a série diverge.
d) De acordo com o teste da integral, a série converge.
e) De acordo com o teste da comparação direta, a série converge.
f) De acordo com o teste da raiz, a série converge.
g) De acordo com o teste da comparação direta, a série diverge.
h) De acordo com o teste da comparação direta, a série converge.
i) De acordo com o teste da comparação no limite, a série diverge.
j) De acordo com o teste da comparação no limite, a série converge.
k) De acordo com o teste da razão, a série dada converge.
l) De acordo com o teste da razão, a série dada diverge.
m) De acordo com o teste da razão, a série dada converge.
n) De acordo com o teste da razão, a série dada converge.
o) De acordo com o teste da raiz, a série converge.
p) De acordo com o teste da raiz, a série converge.
q) De acordo com o teste da raiz, a série converge.
r) De acordo com o teste da raiz, a série diverge.

2.
a) De acordo com o teste da razão, a série converge.
b) De acordo com o teste da razão, a série diverge.
c) De acordo com o teste do n-ésimo termo, a série diverge.

3. Pelo teste da comparação direta, a série é convergente.

4.
a) A série converge.
b) A série diverge.
c) A série converge.
d) A série diverge.

e) A série converge.
f) A série converge.

5.
a) A série é absolutamente convergente.
b) A série é condicionalmente convergente.
c) Pelo teste da comparação no limite, a série é absolutamente convergente.
d) A série é condicionalmente convergente.
e) Pelo teste do n-ésimo termo, a série é divergente.
f) Pelo teste da comparação direta, a série é absolutamente convergente.
g) Pelo teste da razão, a série é absolutamente convergente.
h) Pelo teste da razão, a série é absolutamente convergente.
i) Pelo teste da comparação direta, a série é absolutamente convergente.
j) A série é absolutamente convergente.
k) Pelo teste da raiz, a série é absolutamente convergente.

Observação: Os testes foram mencionados nos exercícios apenas como sugestão, pois mais de um teste pode ser aplicado a uma série para o estudo de sua natureza.