CÁLCULO FUNCIONAL DE MATRIZES

Equipe de Cálculo IV do Departamento de Matemática

24 de Setembro de 2009

Vamos resolver os problemas discreto e contínuo

$$\begin{array}{cc} u_{n+1} = Au_n, & v'(t) = Av(t), \\ u_0 \text{ dado} & v(0) \text{ dado} \end{array}$$

onde A é uma matriz $d \times d$ fixa e u e v são vetores com d coordenadas. Abstratamente, pelo menos, as soluções são fáceis de escrever:

$$u_n = A^n u_0 \quad \text{e} \quad v(t) = e^{tA} v(0)$$

(confira!). Queremos agora mostrar receitas para calcular funções $f(A)$ de uma matriz A (os exemplos que nos interessam são $f(x) = x^n$ e $f(x) = e^{tx}$).

Receita: Calcule os autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ de A, (isto é, as soluções de $\det(A - \lambda I) = 0$) junto com as multiplicidades $m_1, m_2, \ldots, m_k$. Agora, você deve procurar um polinômio p tal que

$$\begin{aligned} p(\lambda_1) &= f(\lambda_1),\, p'(\lambda_1) = f'(\lambda_1),\, \ldots,\, p^{(m_1-1)}(\lambda_1) = f^{(m_1-1)}(\lambda_1), \\ &\vdots \\ p(\lambda_k) &= f(\lambda_k),\, p'(\lambda_k) = f'(\lambda_k),\, \ldots,\, p^{(m_k-1)}(\lambda_k) = f^{(m_k-1)}(\lambda_k). \end{aligned}$$

A matriz procurada, $f(A)$, é simplesmente $p(A)$.

Exemplo: Se

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & -1 \\ -3 & 5 & 1 \\ 21 & -32 & -7 \end{pmatrix},$$

$\lambda_1 = 1$, $m_1 = 1$, $\lambda_2 = 0$, $m_2 = 2$.

Para calcular e^{tA}, basta obter p tal que $p(1) = e^{t1}$, $p(0) = e^{t\cdot 0}$, $p'(0) = te^{t\cdot 0}$. Para satisfazer três pedidos, um polinômio de grau dois, $ax^2 + bx + c$, é suficiente. De fato, faça $c = 1$, $b = t$, $a = e^t - t - 1$. Moral:

$$e^{tA} = (e^t - t - 1)A^2 + tA + 1 \cdot I.$$

1º Atalho: Se a matriz for diagonalizável, calcule os autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ e procure um polinômio p tal que

$$p(\lambda_1) = f(\lambda_1), \ldots, p(\lambda_k) = f(\lambda_k)$$

De novo $f(A) = p(A)$.

Aliás, matrizes simétricas são diagonalizáveis, assim como matrizes com todos seus autovalores diferentes entre si.

Exemplo: Se

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 10 \end{pmatrix},$$

seus autovalores são 1 e 15 (confira: qual é o autovalor duplo?). Como A é simétrica, é diagonalizável. Para calcular A^{1000}, procure um polinômio levando 1 a $1^{1000} = 1$ e 15 a 15^{1000}. Uma mera reta faz isto:

$$p(x) = \frac{15^{1000} - 1}{14} x + \frac{15 - 15^{1000}}{14}.$$

e

$$A^{1000} = p(A) = \begin{pmatrix} 2\alpha + \beta & 2\alpha & 3\alpha \\ 2\alpha & 5\alpha + \beta & 6\alpha \\ 3\alpha & 6\alpha & 10\alpha + \beta \end{pmatrix}$$

onde

$$\alpha = \frac{15^{1000} - 1}{14}, \quad \beta = \frac{15 - 15^{1000}}{14}.$$

Note que se tivéssemos seguido a receita principal teríamos que achar um polinômio de grau dois enquanto no presente caso um de primeiro grau é suficiente.

2º atalho: Suponha que saibamos o polinômio minimal de A e que suas raízes sejam $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ com multiplicidades $m_1, m_2, \ldots, m_k$. Procedemos agora com estes dados exatamente como na receita principal. A vantagem é que a multiplicidade de uma raiz do polinômio minimal pode ser menor que a multiplicidade de uma raiz do polinômio característico. Assim o grau do polinômio procurado poderia ser menor do que seria dado pela receita principal. Alias, o primeiro atalho é um caso particular deste pois o polinômio minimal de uma matriz diagonalizável é $(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \cdots (\lambda - \lambda_k)$ onde $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ são os autovalores.

Exemplo: Se

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

o polinômio minimal é $(\lambda - 1)^2(\lambda - 2)$. Para calcular e^{tA} devemos achar um polinômio de grau dois $p(x) = ax^2 + bx + c$ tal que $p(1) = e^t$, $p'(1) = te^t$ e

$p(2) = e^{2t}$. Uma conta revela:

$$\begin{aligned} a &= e^{2t} - e^{t}(t+1) \\ b &= e^{t}(3t+2) - 2e^{2t} \\ c &= e^{2t} - 2te^{t} \end{aligned}$$

e assim $e^{tA} = aA^2 + bA + cI$.