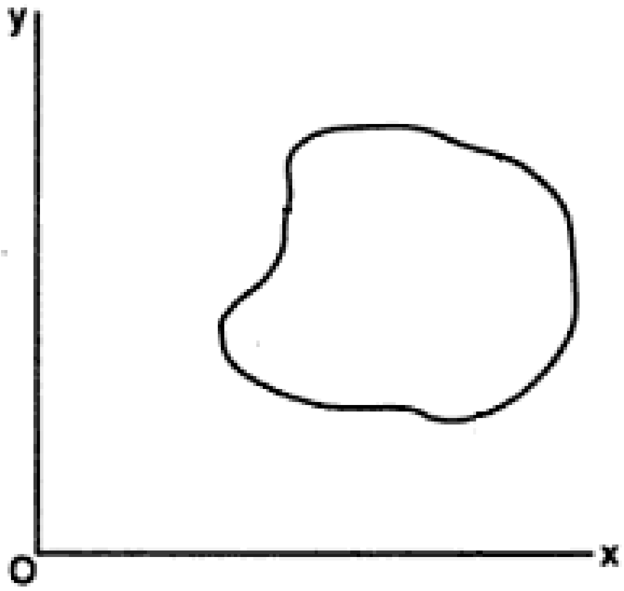
ENG1200 – Mecânica Geral – Semestre 2013.2

Lista de Exercícios 8 – Centróides, Momentos de Inércia, Círculo de Mohr

1 – Prova P2013.1 (P3) - De determinada área (figura) são conhecidos os valores do momento de inércia $I_y = 300\ cm^4$ e do produto de inércia $I_{xy} = -125\ cm^4$ em relação aos eixos que passam pelo ponto O. Se o máximo valor do PRODUTO DE INÉRCIA é obtido girando-se o eixo x de $67{,}5^0$ no sentido anti-horário, pede-se determinar pela construção gráfica do círculo de Mohr:

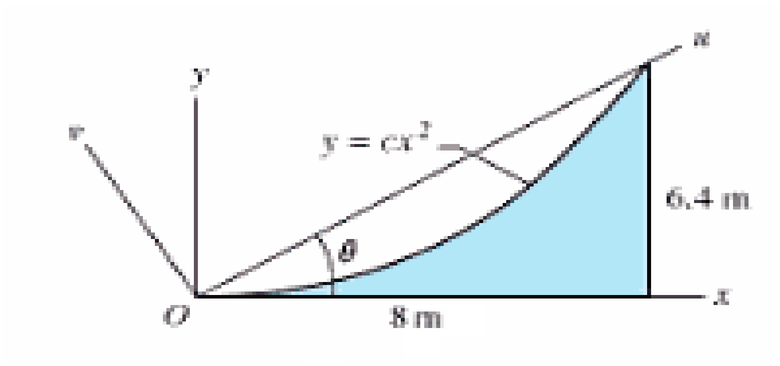
a) o valor do momento de inércia I_x desta área;
b) os valores dos momentos principais de inércia;
c) as inclinações dos eixos principais de inércia em relação ao semi-eixo positivo x (um ângulo positivo significa marcação no sentido anti-horário). Indique a posição aproximada destes eixos principais na figura abaixo;
d) os valores dos momentos de inércia I_u e I_v e do produto de inércia I_{uv} em relação a um par de eixos ortogonais u, v que passam por O formando ângulo de -45^0 (sentido horário) com os eixos x, y.

Observação – Não use nenhuma formulação que não seja obtida diretamente do círculo de Mohr.



Respostas:
$I_x = 550\ cm^4$ $I_{max} = 601.78\ cm^4$ $I_{min} = 248.22\ cm^4$
$\theta_p' = 22.5^0$ ↺ com o semi-eixo x positivo $\theta_p'' = 112.5^0$ ↺ com o semi-eixo x positivo
$I_V = 550\ cm^4$ $I_U = 300\ cm^4$ $I_{UV} = -125\ cm^4$

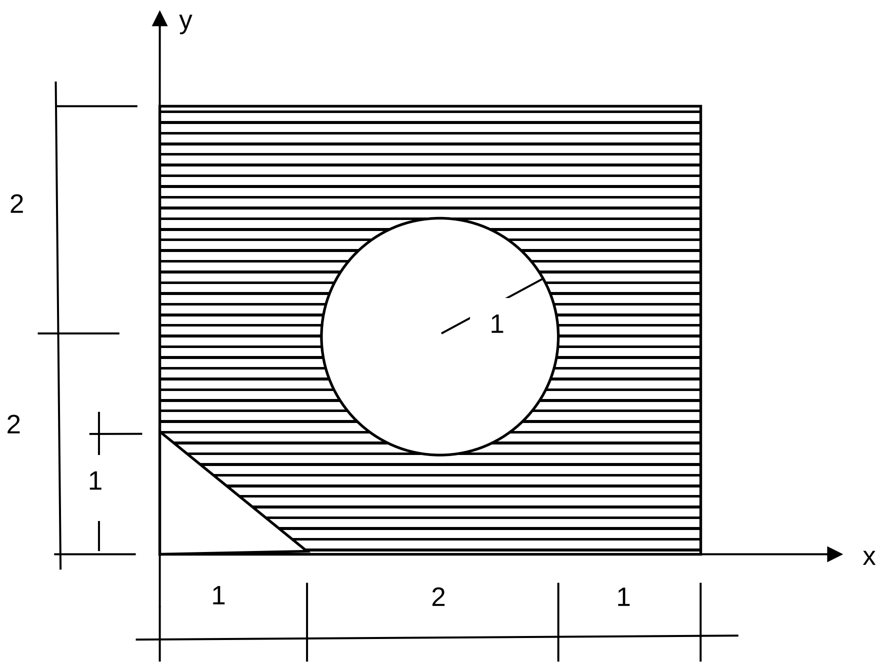
2 – Prova 2012.2 (P4) - Determinar os valores dos momentos de inércia e do produto de inércia da área mostrada na figura em relação aos eixos inclinados u, v que passam pelo ponto O.



Respostas: I_u = 103,503 m^4 I_v = 651,721 m^4 I_{uv} = - 223,001 m^4

3 – Prova 2012.2 (P3) - Utilizando o círculo de Mohr, determine os momentos principais de inércia e os eixos principais que passam pelo centroide C da área sombreada. Unidades em cm. Considere conhecidos os seguintes valores para momentos e produto de inércia de áreas simples (se necessitar de outros, mostre como foram obtidos):

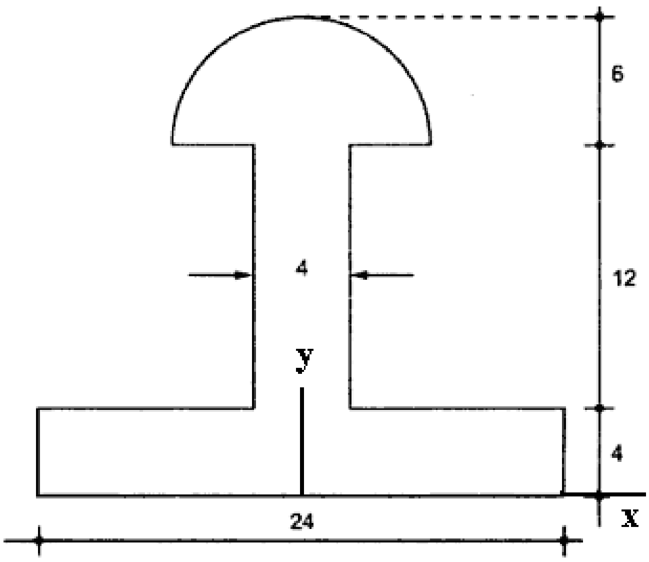
$$\tilde{I}_x^{retângulo} = \frac{bh^3}{12} \qquad \tilde{I}_x^{triângulo} = \frac{bh^3}{36} \qquad \tilde{I}_{xy}^{triângulo} = -\frac{b^2h^2}{72} \qquad \tilde{I}_x^{círculo} = \frac{\pi r^4}{4}$$



Respostas: I_{max} = 20,505 cm^4 I_{min} = 17,643 cm^4 $\theta_s = 45^0$ (observar simetria)

4 – Prova 2012.1 - Com relação à área da figura, cujas medidas são dadas em cm, pede-se determinar:

a) as coordenadas do centróide $C = C\,(\bar{x}, \bar{y})$ em relação aos eixos x, y. Obtenha, por integração, as expressões analíticas para cálculo das coordenadas do centróide de uma sub-área semi-circular de raio r.
b) Os momentos de inércia $\bar{I}_x, \bar{I}_y$ em relação aos eixos horizontal e vertical que passam pelo centróide C.
c) Os ângulos que os eixos principais de inércia que passam por C formam com o eixo horizontal $\bar{x}$, medidos no sentido anti-horário.

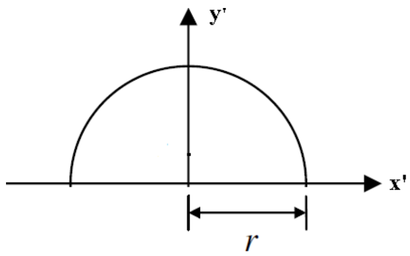


Momento de inércia de área retangular (b x h) em relação ao eixo horizontal que passa por seu próprio centróide:

$$\tilde{I}_x^{\text{retângulo}} = \frac{bh^3}{12}$$

Momentos de inércia e produto de inércia de área semi-circular de raio r em relação aos eixos x', y' da figura

$$I_{x'} = I_{y'} = \frac{\pi r^4}{8}$$



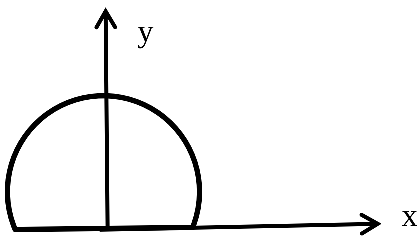
Respostas: a) $\bar{x} = 0$ (simetria), $\bar{y} = 8{,}58$ cm b) $\bar{\bar{I}}_x = 10719{,}46\ cm^4$ $\bar{\bar{I}}_y = 5180{,}94\ cm^4$

c) $\theta = 0^0$ e $\theta = 90^0$ (eixo de simetria é eixo principal)

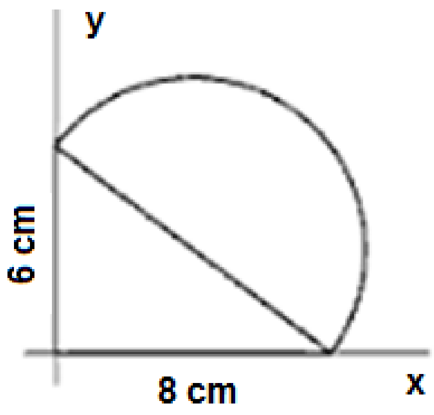
5 – Prova 2011.2 - De uma área semi-circular de raio R considere conhecidos:

a) coordenadas do centróide $\tilde{x} = 0$ $\tilde{y} = \frac{4R}{3\pi}$

b) momentos de inércia em relação aos eixos x, y $I_x = I_y = \frac{\pi R^4}{8}$



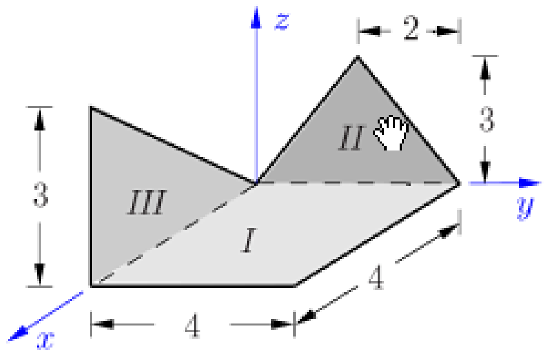
Pede-se determine os momentos de inércia I_x, I_y e o produto de inércia I_{xy} da área semi-circular da figura em relação aos eixos x, y.



Respostas: I_x = 999,60 cm^4 I_y = 1272,35 cm^4 I_{xy} = 1057,66 cm^4

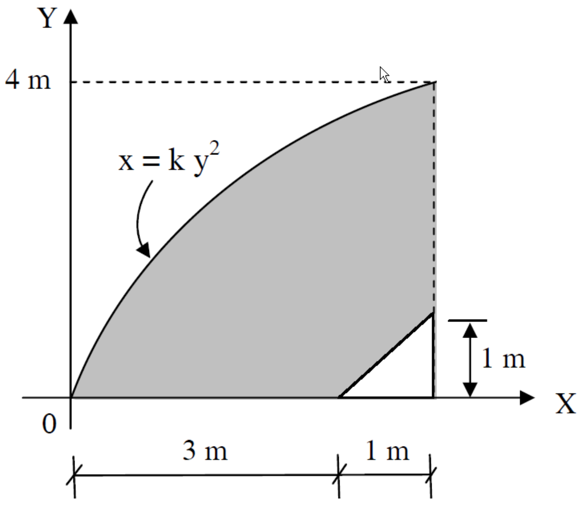
6 – Prova 2011.2 - Uma chapa metálica fina é dobrada conforme figura, consistindo de uma área quadrada e duas triangulares. As medidas são dadas em centímetros. Pede-se determinar as coordenadas do centróide C.

C = C (1,71; 1,57;   0,43)cm



7 – Prova 2011.1 – Para a área da figura, pede-se determinar: a) as coordenadas do centróide C; b) os momentos de inércia $\bar{I}_x, \bar{I}_y$ em relação aos eixos horizontal e vertical que passam pelo centróide C acima determinado

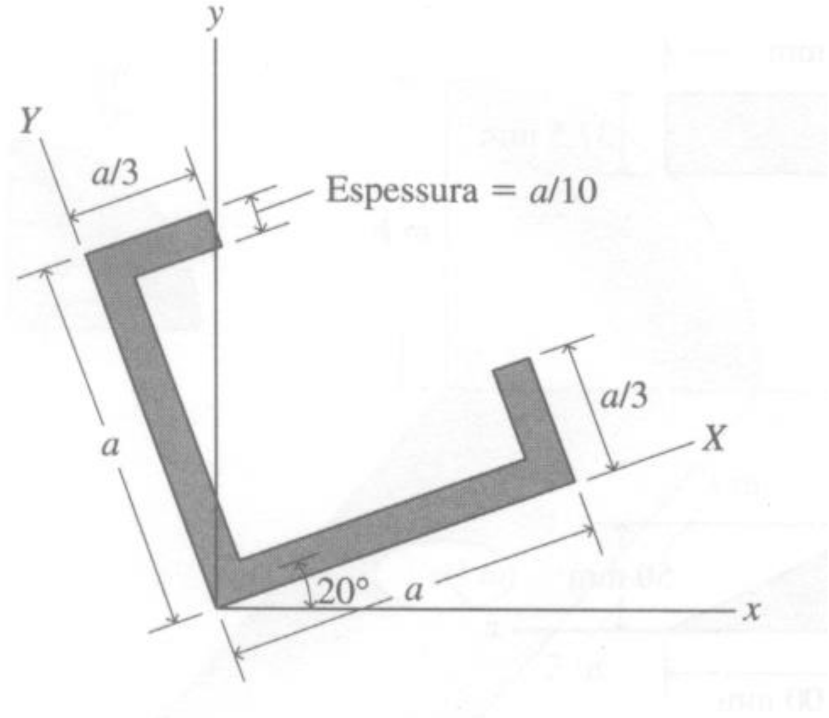
$$\tilde{I}_x^{\text{triângulo}} = \frac{bh^3}{36}$$



Respostas: a) $\bar{x} = 2.34\text{m}$ $\bar{y} = 1{,}56\text{m}$ b) $\bar{I}_x = 9{,}38\ \text{m}^4$ $\bar{I}_y = 10{,}81\ \text{m}^4$

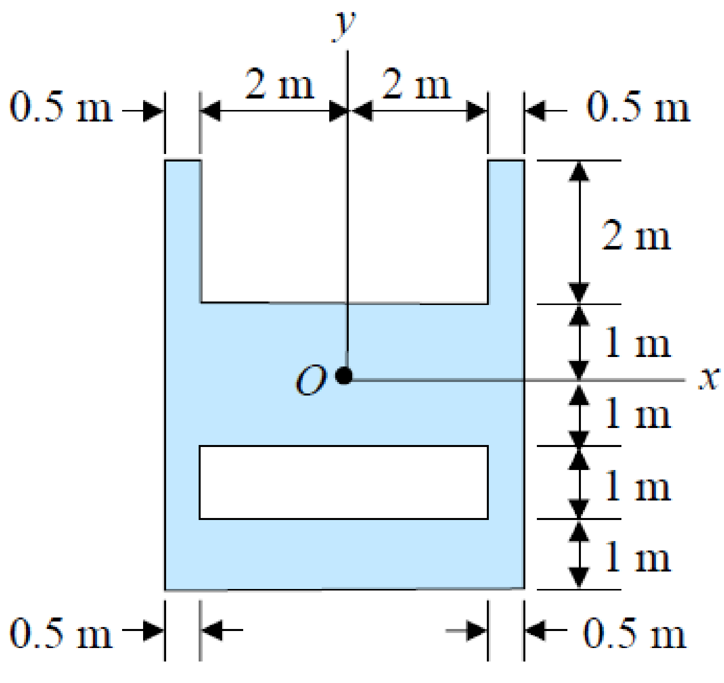
8 – Prova 2011.1 – Para a área da figura, considerando a = 30cm, pede-se determinar pelo círculo de Mohr os valores dos momentos de inércia e do produto de inércia em relação aos eixos x (horizontal) e y (vertical).

$$\tilde{I}_x^{\text{retângulo}} = \frac{bh^3}{12}$$



Respostas: $I_x = 52880{,}48\ m^4$ $I_y = 37697{,}52\ m^4$ $I_{xy} = 9047{,}18\ m^4$

9 – Prova 2011.1 – Determine o produto de inércia $I_{xy} = \int_A xy\,dx\,dy$ da área da figura em relação aos eixos ortogonais x,y.



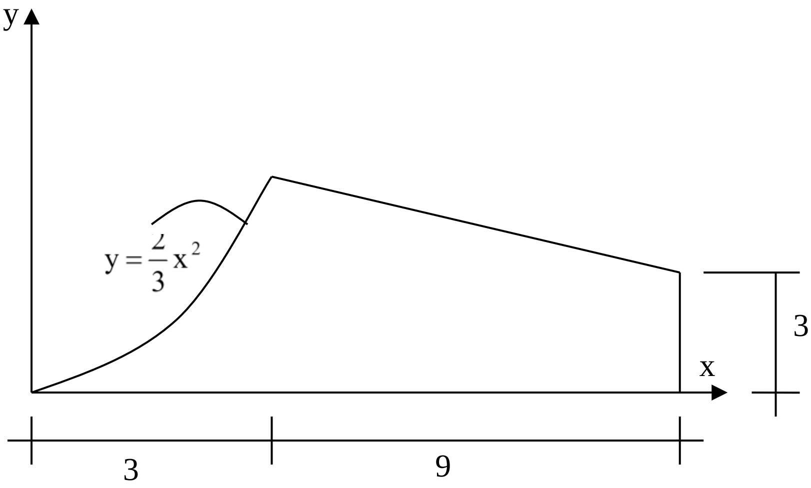
Resposta: $I_{xy} = 0$ porque o eixo y é de simetria.

10 - Prova 2010.2 - Em relação à área mostrada na figura (unidades em cm), pede-se determinar:

a) as coordenadas do centróide $C = C(\bar{x}, \bar{y})$;
b) os valores dos momentos de inércia $\bar{I}_x, \bar{I}_y$ em relação aos eixos horizontal e vertical que passam pelo centróide C.

$$\tilde{I}_{retangulo} = \frac{bh^3}{12} \qquad \tilde{I}_{triangulo} = \frac{bh^3}{36}$$

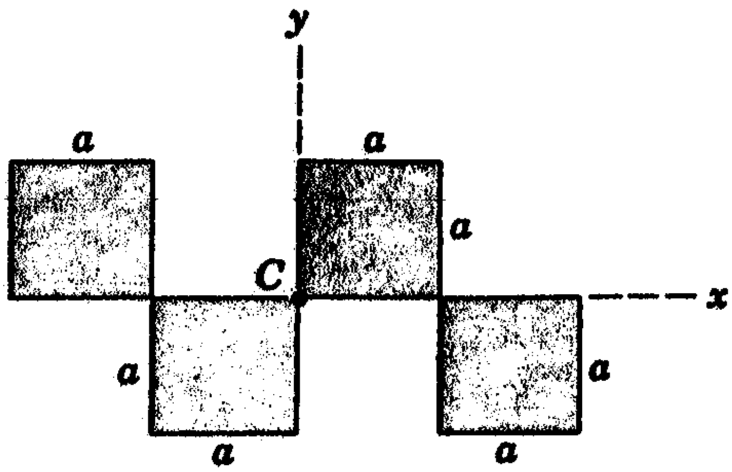
Respostas: a) $\bar{x} = 6{,}39\,\text{cm};\ \bar{y} = 2{,}26\text{cm}$ b) $\bar{I}_x = 96{,}16\ cm^4,\ \bar{I}_y = 383{,}19\ cm^4$



11 – Prova 2010.2 - A área da figura é formada pela combinação de quatro quadrados de lado a = 10cm. Pede-se determinar com auxílio do círculo de Mohr:

a) os momentos de inércia principais em relação aos eixos que passam pelo centróide C localizado na figura;
b) as inclinações dos eixos principais de inércia em relação ao eixo horizontal x;
c) o produto de inércia e o momento de inércia em relação a um eixo que passa pelo ponto C inclinado de 30°, medido no sentido horário, em relação ao eixo horizontal x.

Obs: Utilize somente formulação que possa ser obtida diretamente do círculo de Mohr.



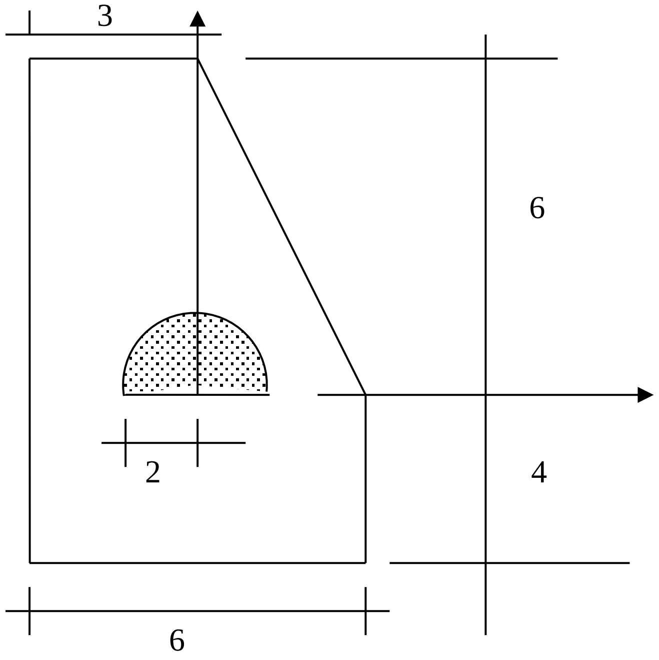
Respostas: a) $\bar{I}_{max} = 55694{,}01\ cm^4$, $\bar{I}_{min} = 10972{,}65\ cm^4$

b) $\theta_p = 76{,}72^0$ no sentido anti-horário entre o eixo x e o eixo principal máximo

c) $I_u = 14674{,}16\ cm^4$, $I_{uv} = 12322{,}15\ cm^4$

12 - Prova 2010.1 - Determine o momento de inércia em relação ao eixo horizontal que passa pelo centróide da área mostrada na figura. Medidas em cm. Para o semi-círculo obter por integração os valores do momento de inércia e da posição do seu respectivo centróide.

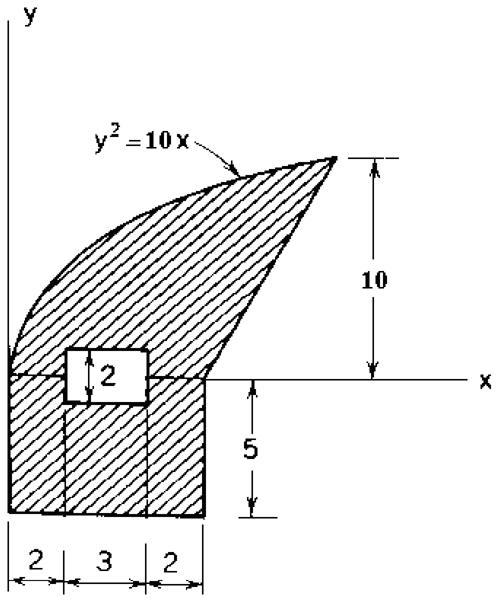
$$\tilde{I}_{retangulo} = \frac{bh^3}{12} \quad \tilde{I}_{triangulo} = \frac{bh^3}{36}$$



Resposta: $\bar{I}_x = 383{,}92\ cm^4$ com $\bar{y} = 0{,}42\ cm$

13 - Prova 2009.2 - Determine o momento de inércia $\bar{I}_y$ em relação ao eixo vertical que passa pelo centróide C da área mostrada na figura. Unidades em cm.

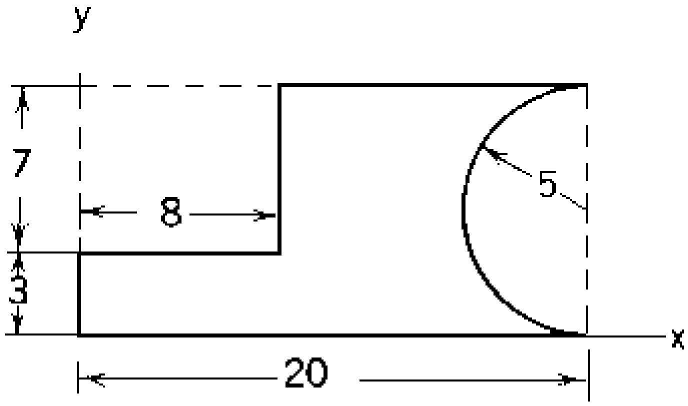
$$\tilde{I}_y^{retangulo} = \frac{hb^3}{12} \qquad \tilde{I}_y^{triangulo} = \frac{hb^3}{36}$$



Resposta: $\bar{I}_y = 463{,}16\ cm^4$ com $\bar{x} = 4{,}54\ cm$

14 - Prova 2009.2 - Empregando o círculo de Mohr, em relação ao ponto O (origem) da área mostrada na figura (unidades em cm), calcule:
a) os momentos principais e os ângulos que os eixos principais de inércia formam com o eixo x. Determine por integração as quantidades referentes ao semi-círculo. Unidades em cm.
b) os valores dos produtos de inércia em relação aos eixos determinados no ítem a);
c) os produtos de inércia máximo e mínimo e a direções dos eixos a que se referem, em relação ao eixo x;
d) os valores dos momentos de inércia em relação aos eixos determinados no ítem c)

$$\tilde{I}_x^{retangulo} = \frac{bh^3}{12}$$



Respostas: a) $I_{max} = 14792{,}6\ cm^4$ $I_{min} = 724{,}4\ cm^4$ $\theta_p = 67{,}16^\circ$ (*sentido horário*); b) $I_{xy} = 0$;
c) $I_{xy}^{max,\,min} = \pm 5033{,}27\ cm^4$ $\theta_s = 22{,}16^\circ$(*sentido horário*) ; d) $I_x = I_y = 7758{,}5\ cm^4$

15 - Prova 2008.2 - Considere a área mostrada na figura. Pede-se determinar:

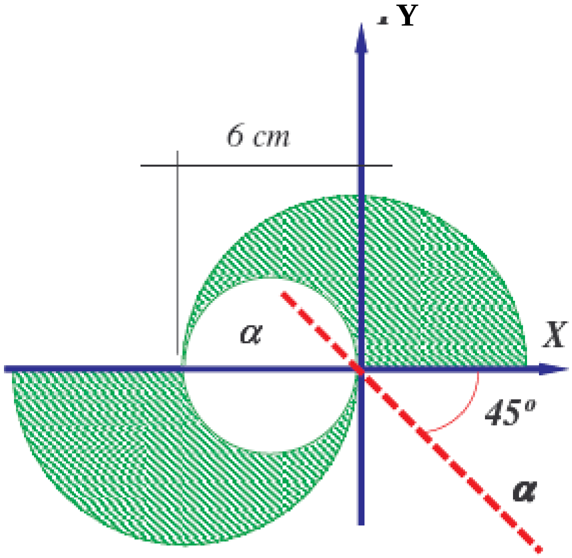
a) As coordenadas do centróide C da área.
Considerar conhecidas as coordenadas do centróide da área componente circular mas calcular por integração as coordenadas das áreas componentes semi-circulares.

b) Os momentos de inércia I_x e I_y em relação aos eixos X, Y mostrados na figura.
Considerar o momento de inércia da área componente circular conhecido $\left(\tilde{I} = \frac{\pi r^4}{4}\right)$ mas calcular por integração os momentos de inércia das áreas componentes semi-circulares.

c) Os momentos de inércia $\bar{I}_x$, $\bar{I}_y$ e o produto de inércia $\bar{I}_{xy}$ da área A em relação a eixos paralelos que passam pelo centróide C.

d) Com auxílio do círculo de Mohr, determine os momentos principais de inércia e os eixos principais de inércia em relação ao centróide C.

e) Com auxílio do círculo de Mohr determine o momento de inércia em relação ao eixo α – α mostrado na figura.

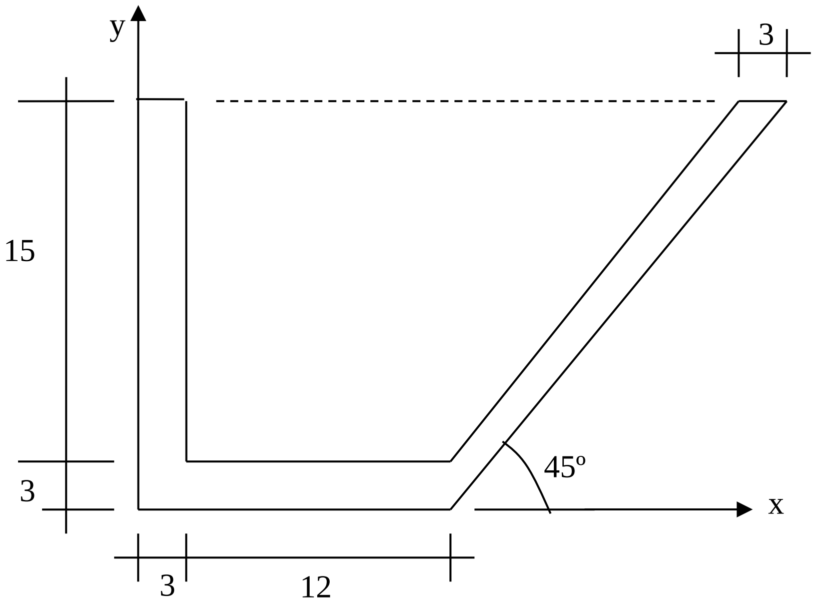


Respostas: a) $\bar{x} = -3\,cm$ $\bar{y} = 0$; b) $I_x = 954{,}26\,cm^4$ $I_y = 2733{,}19\ cm^4$; c) $\bar{I}_x = 954{,}26\,cm^4$ $\bar{I}_y = 1972{,}13\ cm^4$ $\bar{I}_{xy} = 0$; d) $I_{max} = 1972{,}13\ cm^4$ $I_{min} = 954{,}26\,cm^4$ com $\bar{x}$ e $\bar{y}$ sendo os eixos principais; e) $I_{\alpha-\alpha} = 2733{,}19\ cm^4$

16 – Prova 2007.1 - Determine o momento de inércia em relação ao eixo vertical que passa pelo centróide C da área mostrada na figura. Medidas em cm.

$\tilde{I}_y^{\,re\tan gulo} = \dfrac{hb^3}{12}$ $\tilde{I}_y^{\,triângulo} = \dfrac{hb^3}{36}$

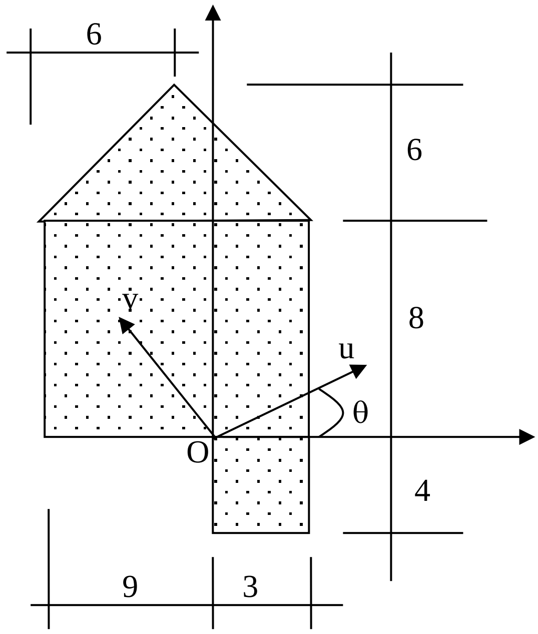
Resposta: $\bar{I}_y = 14083{,}62\ cm^4$ com $\bar{x} = 11{,}16\ cm$



17- Prova 2007.1 - Com relação à área mostrada na figura (medidas em cm) pede-se:

a) os momentos principais de inércia em relação aos eixos que passam pelo ponto O;
b) as inclinações dos eixos principais de inércia em relação ao eixo horizontal *x*;
c) os momentos de inércia e o produto de inércia em relação a um par de eixos ortogonais *u*, *v* inclinados de $\theta = 30^o$, que passam pelo ponto O.

$\tilde{I}_y^{retangulo} = \frac{hb^3}{12}$ $\tilde{I}_y^{triângulo} = \frac{hb^3}{36}$



Respostas: a) $I_{max} = 6961{,}27\ cm^4$ $I_{min} = 1414{,}73\ cm^4$ b) $\theta_p = 27{,}43^\circ$ $\theta_p^{'} = 117{,}43^\circ$

c) $I_u = 6950{,}12\ cm^4$ $I_v = 1425{,}88\ cm^4$ $I_{uv} = 248{,}46\ cm^4$

18 - Prova 2007.1 - Com relação à área mostrada na figura (medidas em cm) pede-se:

a) os momentos de inércia $\bar{I}_x$ e $\bar{I}_y$ em relação aos eixos horizontal $(\bar{x})$ e vertical $(\bar{y})$ que passam pelo centróide C da área.

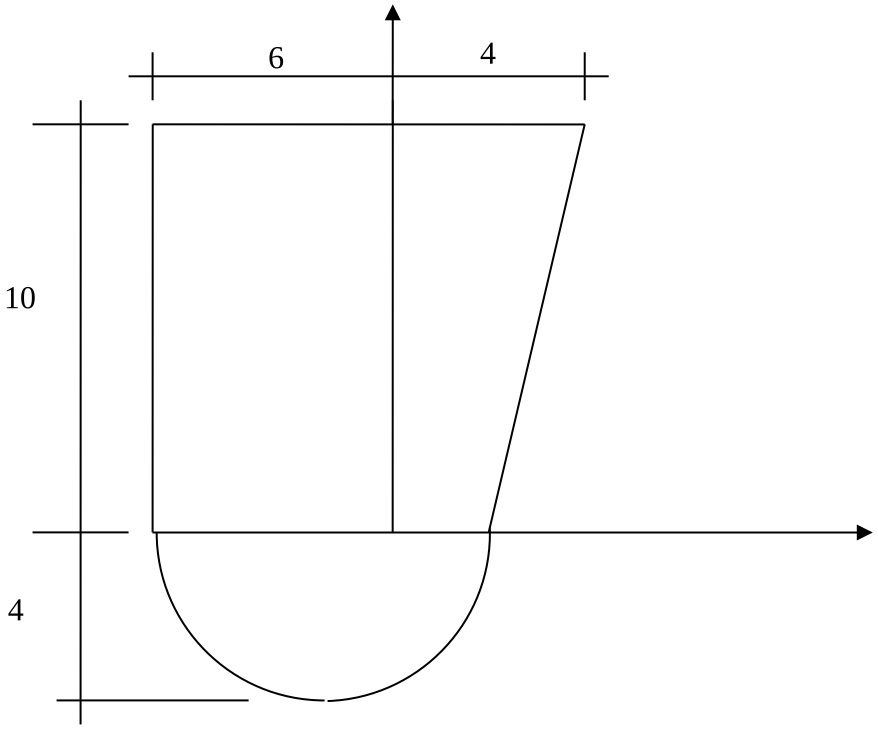
Pela construção do círculo de Mohr, pede- se também determinar em relação ao centróide C:

b) os momentos principais de inércia;
c) as direções dos eixos principais de inércia em relação ao eixo horizontal $(\bar{x})$;
d) os produtos principais de inércia;
e) as direções dos eixos dos produtos principais de inércia em relação ao eixo horizontal $(\bar{x})$;
f) os valores dos momentos de inércia quando os produtos de inércia forem máximo ou mínimo.

Respostas: a) $\bar{I}_x = 1705{,}73\,cm^4$ $\bar{I}_y = 728{,}28\ cm^4$ com $\bar{x} = -1{,}59\ cm$ e $\bar{y} = 3{,}68\ cm$

b) $\bar{I}_{max} = 1723{,}68\ cm^4$ $\bar{I}_{min} = 710{,}32\ cm^4$ c) $\theta_p = 7{,}65^\circ$ $\theta_p^{'} = 97{,}65^\circ$ d) $I_{xy}^{max,min} = \pm 506{,}68\ cm^4$

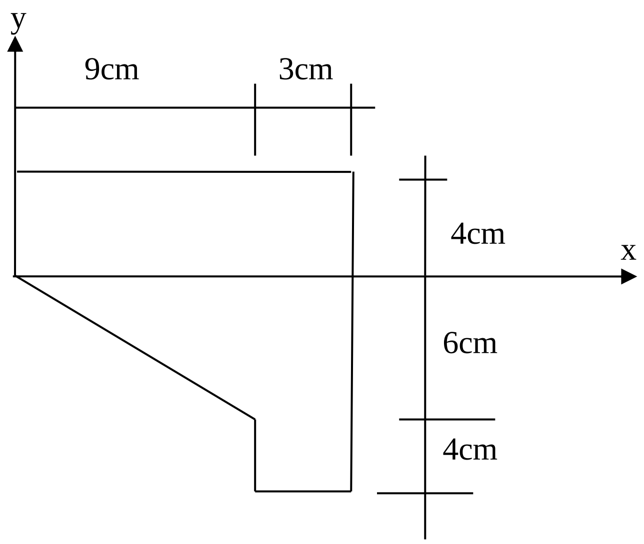
e) $\theta_s = 37{,}35^\circ$ $\theta_s^{'} = 127{,}35^\circ$ f) $I_x = I_y = 1217{,}0\ cm^4$



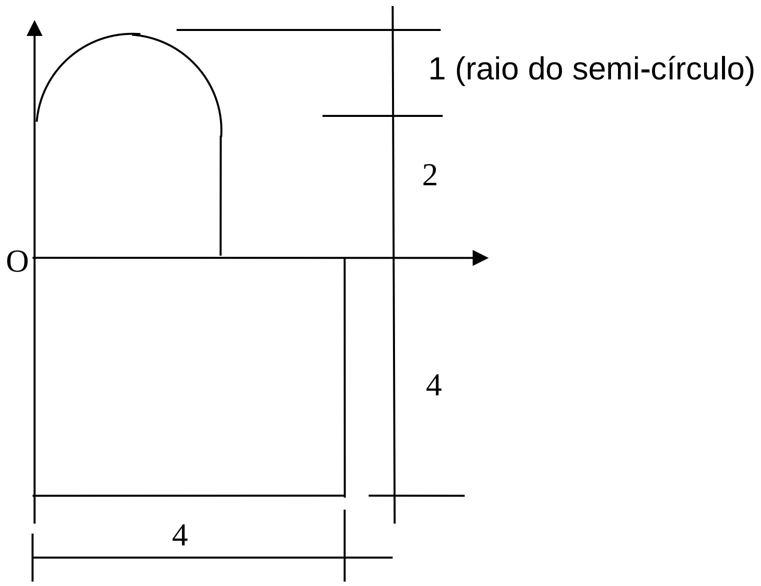
19 - Prova 2005.2 - Determine o momento de inércia em relação ao eixo horizontal que passa pelo centróide da área composta. Unidades: cm

$$I_{retangulo} = \frac{bh^3}{12} \qquad I_{triangulo} = \frac{bh^3}{36}$$

Resposta: $\bar{I}_x = 1306{,}91\ cm^4$ com $\bar{y} = -1{,}03\ cm$



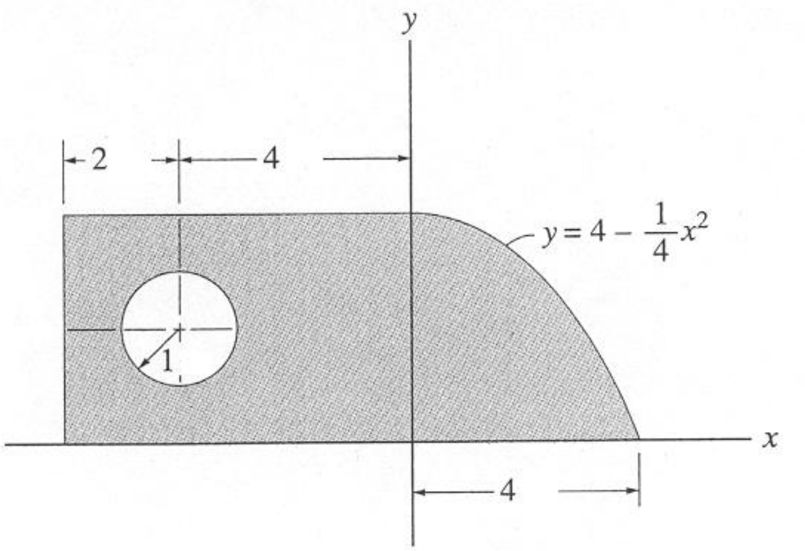
20 - Prova 2005.2 - Determine os momentos principais de inércia e os eixos principais de inércia que passam pelo ponto O da área mostrada na figura, através da construção do círculo de Mohr. Medidas em cm.



Respostas: $I_{max} = 152{,}62\ cm^4$ $I_{min} = 40{,}0\ cm^4$ $\theta_p = 43{,}12^\circ$

21 – Prova 2003.2 – Determinar o momento de inércia $\bar{I}_y$ da área mostrada na figura em relação ao eixo paralelo a y que passa pelo centróide C da área composta. Dimensões em cm.

$\tilde{I}_y^{retangulo} = \frac{hb^3}{12}$ $\tilde{I}_y^{circulo} = \frac{\pi r^4}{4}$



Resposta: $\bar{I}_y$ = 211,24 cm^4