Gabarito da P4, 2011.1

Questão 1

Temos que $u(x,y) = f(xy) = f(g(x,y)) = (f \circ g)(x,y)$, onde $g(x,y) = x.y$. Portanto temos uma composição de funções diferenciáveis. Aplicando a Regra da Cadeia, temos:

$$\begin{aligned}\nabla u(x,y) = Df(g(x,y)).\nabla g(x,y) &= f'(xy)\nabla g(x,y)\\ &= f'(xy)\big(y,x\big) = \big(yf'(xy), xf'(xy)\big),\end{aligned}$$

ou seja

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}(x,y) = f'(xy).y \\ \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,y) = f'(xy).x. \end{cases}$$

Portanto,

$$x\frac{\partial u}{\partial x} - y\frac{\partial u}{\partial y} = xyf'(xy) - xyf'(xy).\frac{x}{y^2} = f'(xy)(xy - xy) = 0.$$

Questão 2

item (a): Como o campo é definido em todo $\mathbb{R}^2$, uma condição necessária e suficiente para ser conservativo é que para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial P}{\partial y}(x,y).$$

No caso do campo dado,

$$\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = 2x = \frac{\partial P}{\partial y}(x,y),$$

portanto trata-se efetivamente de um campo conservativo.

Para achar um potencial, temos de resolver $\mathbf{F} = \nabla f$, ou seja, o sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = e^x + 2xy \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = x^2. \end{cases}$$

Integrando a segunda equação, obtemos $f(x, y) = x^2 y + h(x)$, e substituindo na primeira vem que

$$2xy + h'(x) = e^x + 2xy \Rightarrow h'(x) = e^x \Rightarrow h(x) = e^x + C$$

, onde C é uma constante qualquer. Assim, um potencial para $\mathbf{F}$ é $f(x, y) = x^2 y + e^x$.

item (b): Como o campo $\mathbf{F}$ é conservativo, segue do Teorema Fundamental do Cálculo para integrais de linha que

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \oint_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} = f(1,1) - f(0,0) = 1 + e^1 - e^0 = 1 + e - 1 = e.$$

Questão 3

A fronteira $C = \partial S$ da superfície dada corresponde a intersecção do elipsóide com o plano $z = 0$, ou seja, trata-se da curva de equação $x^2 + y^2 = 1$ (o círculo unitário com centro na origem). Pelo Teorema de Stokes,

$$\iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dS = \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r},$$

onde C é percorrida no sentido anti-horário. Agora, C também é fronteira da superfície plana G dada pelo gráfico de $z = f(x, y) = 0$, com $x^2 + y^2 \leq 1$. Logo, usando novamente o Teorema de Stokes, temos

$$\iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dS = \oint_{\partial C} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_G (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dS.$$

Agora,

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ \\ x^3 & y^4 & z^3\text{sen}xy \end{bmatrix} = (xz^3 \cos xy, -yz^3 \cos xy, 0).$$

Então, lembrando que em G, o vetor normal unitário, compatível com o sentido de percurso anti-horário de C é $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{k}} = (0,0,1)$, vem que, em G, $\mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} = (xz^3 \cos xy, -yz^3 \cos xy, 0) \cdot (0,0,1) = 0$.

Finalmente, concluímos que

$$\iint\limits_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dS = \iint\limits_G (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dS = 0.$$

Questão 4

Temos que checar que para o cubo sólido E correspondente,

$$\iint\limits_S \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dS = \iiint\limits_E \nabla \cdot \mathbf{F}\, dV.$$

Calculemos o lado esquerdo primeiro. Como $\nabla \cdot \mathbf{F}(x,y,z) = 2(x+y+z)$, segue, usando simetria, que

$$\begin{aligned} \iiint\limits_E \nabla \cdot \mathbf{F}\, dV &= 2 \iiint\limits_E (x+y+z) dV = 6 \iiint\limits_E x dV \\ &= 6 \int_0^a \int_0^a \int_0^a x dx dy dz = 6a^2 \int_0^a x dx = 3a^4. \end{aligned}$$

Agora, como $S = \cup_{i=1}^6 S_i$, onde os S_i's são as faces do cubo, com vetores normais unitários apontando para fora e dados, respectivamente, por $\hat{\mathbf{n}}_1 = -\hat{\mathbf{n}}_2 = \hat{\mathbf{i}} = (1,0,0)$, $\hat{\mathbf{n}}_3 = -\hat{\mathbf{n}}_4 = \hat{\mathbf{j}} = (0,1,0)$ e $\hat{\mathbf{n}}_5 = -\hat{\mathbf{n}}_6 = \hat{\mathbf{k}} = (0,0,1)$, temos então que em S_1 e S_2, $\mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \pm x^2$. Como $x = a$ em S_1 e $x = 0$ em S_2, segue que

$$\iint\limits_{S_2} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dS = 0 \quad \text{e} \quad \iint\limits_{S_1} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dS = a^2 A(S_1) = a^4.$$

Raciocínio totalmente análogo resulta em

$$\iint_{S_4} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS = 0 \quad \text{e} \quad \iint_{S_3} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS = a^4$$

e

$$\iint_{S_6} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS = 0 \quad \text{e} \quad \iint_{S_5} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS = a^4.$$

Logo,

$$\iint_{S} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS = \sum_{i=1}^{6} \iint_{S_i} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}}_i \, dS = 3a^4,$$

e o Teorema da Divergência está verificado.