Gabarito da P3, 2011.1

Questão 1

A superfície S é o gráfico de $z = f(x,y) = 4 - x^2 - y^2$, que é a parte do parabolóide invertido de base circular, com vértice $(0,0,4)$ e cuja interseção com o plano xOy é o círculo centrado na origem e com raio 2 ($z = 0 \Rightarrow x^2+y^2 = 4$). Assim, o domínio de f é o disco $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 4\}$ e podemos parametrizar S por $\mathbf{r}(x,y) = (x,y,4-x^2-y^2)$, com $(x,y) \in D$.

Temos então que $\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y = (2x, 2y, 1)$ e da definição de área de superfície segue que

$$A(S) = \iint\limits_D \|\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y\| dxdy = \iint\limits_D \sqrt{1+4(x^2+y^2)}dxdy$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^2 \sqrt{1+4r^2}rdrd\theta = 2\pi\frac{1}{8}\int_1^{17}\sqrt{v}\,dv = \frac{\pi}{4}\frac{2}{3}[v^{3/2}]_1^{17} = \frac{\pi}{6}(17\sqrt{17}-1).$$

Questão 2

item (a): Seja E o cilindro sólido correspondente à superfície S. como $\nabla\cdot\mathbf{F} = 3$, segue do Teorema da Divergência (com os vetores normais unitários apontando para fora de S) que:

$$\iint\limits_S \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{n}}\,dS = \iiint\limits_E \nabla\cdot\mathbf{F}\,dV = 3\text{Vol}(E) = 3\pi a^2 b,$$

já que o volume do cilindro é produto da área da base, πa^2, pela altura, b, logo $Vol(E) = \pi a^2 b$.

item (b): Temos que $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$, onde S_1 é a superfície lateral do cilindro e S_2, S_3 as tampas de cima e de baixo, respectivamente. Assim,

$$\iint\limits_S \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{n}}\,dS = \iint\limits_{S_1}\mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{n}}_1\,dS + \iint\limits_{S_2}\mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{n}}_2\,dS + \iint\limits_{S_3}\mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{n}}_3\,dS.$$

Em S_3, $\hat{\mathbf{n}}_3 = -\hat{\mathbf{k}} = (0,0,-1)$, e portanto

$$\iint_{S_3} \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{n}}_3\, dS = -\iint_{S_3} \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{k}}\, dS = -\iint_{S_3} z\, dS = 0,$$

pois em S_3 temos $z = 0$.

Em S_2, $\hat{\mathbf{n}}_2 = \hat{\mathbf{k}} = (0,0,1)$, e lembrando que em S_2 temos $z = b$, vem que:

$$\iint_{S_2} \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{n}}_2\, dS = \iint_{S_2} z\, dS = b\iint_{S_2} dS = bA(S_2) = \pi a^2 b.$$

Para cada $(x,y,z) \in S_1$, o vetor normal unitário apontando para o exterior é $\hat{\mathbf{n}}_1 = (1/a)(x,y,0)$ (alternativamente, pode-se usar coordenadas cilíndricas). Lembrando que em S_1 temos $x^2 + y^2 = a^2$, segue que:

$$\iint_{S_1} \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{n}}_1\, dS = \iint_{S_1} (1/a)(x^2+y^2)\, dS = aA(S_1) = a(b2\pi a) = 2\pi a^2 b.$$

Finalmente, somando, resulta que

$$\iint_{S} \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{n}}\, dS = \pi a^2 b + 2\pi a^2 b = 3\pi a^2 b,$$

em acordo com o valor obtido no item (b).

Questão 3

Aplicamos o Teorema de Stokes, tomando como superfície S o próprio plano, parametrizado por $\mathbf{r}(x,y) = (x, y, 1-x-y)$, definido em $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1-x\}$ e com vetor normal $\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y = (1,1,1)$, que é compatível com a orientação de C.

Agora,

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ xy & yz & xz \end{bmatrix} = (-y, -z, -x).$$

Então, lembrando que em S, $z = 1 - x - y$, temos:

$$\oint\limits_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint\limits_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dS = \iint\limits_D (-y, -1 + x + y, -x) \cdot (1, 1, 1)\, dxdy$$
$$= -\int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy = -\int_0^1 (1 - x)dx = -[x - (x^2/2)]_0^1 = -\frac{1}{2}.$$

Alternativamente, a integral de linha pode ser feita explícitamente.

Questão 4

item(a): **VERDADEIRO**.

De fato, aplicando o Teorema da Divergência para o campo $\mathbf{G} = \nabla \times \mathbf{F}$, temos:

$$\iint\limits_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dS = \iint\limits_S \mathbf{G} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dS = \iiint\limits_E \nabla \cdot \mathbf{G}\, dV = 0,$$

pois $\nabla \cdot \mathbf{G} = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = 0$.

item(b): **VERDADEIRO**.

Considere uma superfície S, tendo C como fronteira. Pelo Teorema de Stokes, com $\mathbf{F}(x, y, z) = (y^3z^2, 3xy^2z^2, 2xy^3z)$, temos

$$\oint\limits_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint\limits_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dS,$$

onde

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ y^3z^2 & 3xy^2z^2 & 2xy^3z \end{bmatrix}$$

$$= (6xy^2z - 6xy^2z, -(2y^3z - 2y^3z), 3y^2z^2 - 3y^2z^2) = (0.0.0).$$