P2 de Cálculo a Várias Variáveis I

MAT 1162 — 2012.2

17 de outubro de 2012

Nome: ______________________ Matrícula: __________

Assinatura: ______________________ Turma: __________

Questão	Valor	Nota	Revisão
1	3.0		
2	2.0		
3	3.0		
Teste	2.0		
Total	10.0		

Instruções

- Mantenha seu celular desligado durante toda a prova.
- Não é permitido usar nenhum tipo de calculadora ou dispositivo eletrônico.
- Não destaque as folhas da prova.
- A prova pode ser resolvida a lápis, caneta azul ou caneta preta. Não é permitido usar caneta vermelha ou verde.
- Você não tem o direito de consultar anotações.
- Desenvolva a solução de cada questão, de maneira clara e objetiva, na folha em que a mesma está enunciada. Utilize o verso da folha se necessário.
- <u>RESPOSTAS SEM JUSTIFICATIVAS NÃO SERÃO CONSIDERADAS</u>.

1. Considere as superfícies

$$S_1 = \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ \mid \ x^3 + z^3 - y = 3\Big\}$$
$$S_2 = \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ \mid \ z^2 - x^2 = 1 \ , \ z > 0 \ , \ -1 \le x \le 1\Big\}$$

Considere a curva espacial de interseção das superfícies, $C = S_1 \cap S_2$.

(a) **(2.0)** Exiba uma parametrização $\bar{\alpha} : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ de C,

$$\alpha(t) = \big(x(t), y(t), z(t)\big) \in C \,, \quad t \in [a,b] \,,$$

satisfazendo

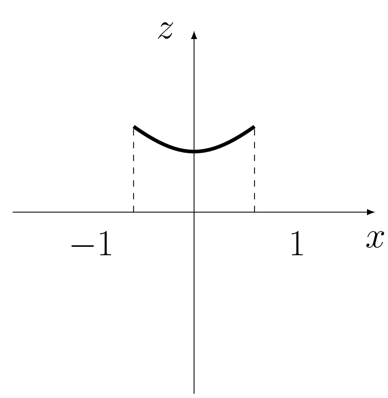
- $\alpha\left([a,b]\right) = C$
- $\alpha'(t) \neq 0, \forall t \in [a,b]\,.$

explicitando a, b e $\alpha(t)$, $t \in [a,b]$.

(b) **(1.0)** Escreva a equação cartesiana do plano π ortogonal à curva espacial C passando pelo ponto $(0,-2,1)$.

Solução:

(a) A superfície S_1 é o gráfico de uma função de x e z, pois $x^3 + z^3 - y = 3 \Rightarrow y = x^3 + z^3 - 3$. Já a superfície S_2 é um cilindro que tem como base um arco de hipérbole no plano xz. A curva obtida como projeção ortogonal de C no plano xz está esboçada abaixo:



Esta curva plana pode ser parametrizada como um gráfico de função de x. Fazendo $x = t$:

$$t \to \left(t, \sqrt{t^2+1}\right) \ , \ \ t \in [-1,1] \ .$$

Logo,

$$\begin{aligned}\alpha(t) &= \big(x(t), y(t), z(t)\big)\\ &= \Big(t, t^3 + (t^2+1)^{\frac{3}{2}} - 3, (t^2+1)^{\frac{1}{2}}\Big)\ ,\ \ t \in [-1,1]\,.\end{aligned}$$

(b) Observe que o vetor normal N do plano π é o vetor tangente à curva C no ponto $(0,-2,1)$. Logo, como

$$\alpha'(t) = \Big(1, 3t^2 + 3t(t^2+1)^{\frac{1}{2}}, t(t^2+1)^{-\frac{1}{2}}\Big)$$

e

$$\alpha(0) = (0,-2,1)$$

temos que

$$N = \alpha'(0) = (1,0,0)\,.$$

Assim, π é o plano de vetor normal $(1,0,0)$ e que passa pelo ponto $(0,-2,1)$, dado então pela equação $x = 0$ (ou seja, é o π plano yz).

2. Considere a função
$$f(x,y,z) = x^2 + xy + y^2 - z^2$$
e a superfície
$$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; f(x,y,z) = 1\right\} .$$

(a) **(0.3)** Determine quais dos pontos abaixo pertencem à superfície S:
$$P_1 = (1,0,0)\,, \quad P_2 = (1,-1,\sqrt{3})\,, \quad P_3 = (1,0,-1)\ .$$

(b) **(0.7)** Escolha um ponto do item anterior que pertença à superfície S. Escreva a equação cartesiana do plano tangente a S passando por esse ponto.

(c) **(1.0)** Considere os pontos $P = (1,-1,0)$ e $Q = (0,1,0)$ pertencentes à superfície S. Considere o vetor $\bar{v} = \left(1,1,\frac{3}{2}\right)$. Seja r_1 a reta passando por P com vetor diretor $\bar{v}$, e seja r_2 a reta passando por Q com vetor diretor $\bar{v}$. Determine se r_1 é tangente a S no ponto P, e se r_2 é tangente a S no ponto Q. Justifique sua resposta.

Observação: Uma reta é tangente a uma superfície S em um ponto $(x_0,y_0,z_0) \in S$ se e somente se a reta passa pelo ponto (x_0,y_0,z_0) e está contida no plano tangente à superfície neste ponto.

Solução:

(a) Como
$$\begin{aligned} &f(1,0,0) = 1 \\ &f(1,-1,\sqrt{3}) = -2 \\ &f(1,0,-1) = 0 \end{aligned}$$
segue que apenas o ponto P_1 pertence à superfície S.

(b) Devemos determinar a equação cartesiana do plano tangente à superfície S passando pelo ponto $P_1 = (1,0,0)$.

Observe que
$$\nabla f(x,y,z) = (2x+y, x+2y, -2z)\ .$$

O vetor normal do plano tangente à superfície S no ponto $(1,0,0)$ é
$$N = \nabla f(1,0,0) = (2,1,0)\ .$$

Logo, a equação do plano é dada por:
$$\begin{aligned} & (2,1,0)\cdot(x-1, y-0, z-0) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & 2(x-1) + y = 0 \\ \Leftrightarrow\ & 2x + y - 2 = 0 \end{aligned}$$

(c) A reta r_1 estará contida no plano tangente à superfície S em P se seu vetor diretor $\bar{v} = \left(1, 1, \frac{3}{2}\right)$ for perpendicular ao vetor normal deste plano, ou seja, se seu vetor diretor for perpendicular ao vetor gradiente de f em P. De fato, observe que

$$\bar{v} \cdot \nabla f(1, -1, 0) = \left(1, 1, \frac{3}{2}\right) \cdot (1, -1, 0) = 1 - 1 + 0 = 0 \ .$$

Logo, concluimos que r_1 é uma reta tangente à superfície S no ponto P.

A análise será análoga para a reta r_2. Observe que seu vetor diretor $\bar{v} = \left(1, 1, \frac{3}{2}\right)$ <u>não</u> é perpendicular ao vetor gradiente de f em Q:

$$\bar{v} \cdot \nabla f(0, 1, 0) = \left(1, 1, \frac{3}{2}\right) \cdot (1, 2, 0) = 1 + 2 + 0 = 3 \ .$$

Logo, concluimos que r_2 não é uma reta tangente à superfície S no ponto Q.

3. Seja $f(x,y)$ uma função com segundas derivadas parciais f_{xx}, f_{yy}, $f_{xy} = f_{yx}$ contínuas. Sejam

$$\begin{aligned} x(u,v) &= \ln(1+u^2+v^2)\ , \\ y(u,v) &= e^{u+v}\,\mathrm{sen}(uv) \end{aligned}$$

e

$$g(u,v) = f\left(x(u,v), y(u,v)\right)\ .$$

Assuma que

$$f\left(\ln(2),0\right) = 1\,,\quad f_x\left(\ln(2),0\right) = 2\,,\quad f_y\left(\ln(2),0\right) = e^{-1}\,.$$

(a) **(2.0)** Calcule o gradiente de $g(u,v)$ no ponto $(0,1)$. Calcule também a taxa de maior variação de $g(u,v)$ no ponto $(0,1)$ (i.e., a máxima derivada direcional de $g(u,v)$ no ponto $(0,1)$).

(b) **(1.0)** Sabendo que

$$f_{xx}\left(\ln(2),0\right) = a\,,\quad f_{xy}\left(\ln(2),0\right) = b\,,\quad f_{yy}\left(\ln(2),0\right) = c\,,$$

calcule $g_{vv}(0,1)$ em função de a, b e c.

Solução:

(a) Primeiramente, devemos encontrar as coordenadas do vetor gradiente $\nabla g(0,1) = (g_u(0,1), g_v(0,1))$. Como $x(0,1) = \ln(2)$ e $y(0,1) = 0$, temos que:

$$\begin{aligned} g_u(0,1) &= f_x\left(\ln(2),0\right) x_u(0,1) + f_y\left(\ln(2),0\right) y_u(0,1) \\ g_v(0,1) &= f_x\left(\ln(2),0\right) x_v(0,1) + f_y\left(\ln(2),0\right) y_v(0,1)\ . \end{aligned}$$

Observe que

$$\begin{aligned} x_u &= \frac{2u}{1+u^2+v^2} \\ x_v &= \frac{2v}{1+u^2+v^2} \\ y_u &= e^{u+v}\,\mathrm{sen}(uv) + v\,e^{u+v}\,\cos(uv) \\ y_v &= e^{u+v}\,\mathrm{sen}(uv) + u\,e^{u+v}\,\cos(uv)\,, \end{aligned}$$

logo,

$$\nabla g(0,1) = \left(g_u(0,1), g_v(0,1)\right) = \left(2\,.\,0 + e^{-1}.\,e\ ,\ 2\,.\,1 + e^{-1}.\,0\right) = (1,2)\,.$$

A taxa de maior variação de $g(u,v)$ no ponto $(0,1)$ é dada pela derivada direcional de $g(u,v)$ no ponto $(0,1)$ na direção do vetor gradiente $\nabla g(0,1)$:

$$\nabla g(0,1)\cdot\frac{\nabla g(0,1)}{\|\nabla g(0,1)\|} = \|\nabla g(0,1)\| = \sqrt{1^2+2^2} = \sqrt{5}\ .$$

(b) Observe que

$$g_v = f_x\,x_v + f_y\,y_v\ .$$

Logo,

$$\begin{aligned} g_{vv} &= \Big[\big(f_{xx}\,x_v + f_{xy}\,y_v\big)\,x_v \;+\; f_x\,x_{vv}\Big] + \Big[\big(f_{yx}\,x_v + f_{yy}\,y_v\big)\,y_v \;+\; f_y\,y_{vv}\Big] \\ &= f_{xx}\,x_v^2 + 2f_{xy}\,x_v\,y_v + f_{yy}\,y_v^2 + f_x\,x_{vv} + f_y\,y_{vv}\ . \qquad (1) \end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned} x_v &= \frac{2v}{1+u^2+v^2} \\ y_v &= e^{u+v}\,\mathrm{sen}(uv) + u\,e^{u+v}\,\cos(uv)\,, \end{aligned}$$

temos que

$$\begin{aligned} x_{vv} &= 2\,\frac{\big[1\,.\,(1+u^2+v^2) - v\,.\,2v\big]}{(1+u^2+v^2)^2} = \frac{2(1+u^2-v^2)}{(1+u^2+v^2)^2} \\ y_{vv} &= \big[e^{u+v}\,\mathrm{sen}(uv) + u\,e^{u+v}\,\cos(uv)\big] + u\,\big[e^{u+v}\,\cos(uv) - u\,e^{u+v}\,\mathrm{sen}(uv)\big] \end{aligned}$$

Por (1) segue que

$$\begin{aligned} g_{vv}(0,1) &= f_{xx}(\ln(2),0)\,x_v^2(0,1) + 2f_{xy}(\ln(2),0)\,x_v(0,1)\,y_v(0,1) + \\ &\quad + f_{yy}(\ln(2),0)\,y_v^2(0,1) + f_x(\ln(2),0)\,x_{vv}(0,1) + f_y(\ln(2),0)\,y_{vv}(0,1) \\ &= a\,.\,1^2 + 2b\,.\,1\,.\,0 + c\,.\,0^2 + 2\,.\,0 + e^{-1}.\,0 \\ &= a \end{aligned}$$

Folha de Rascunho