Gabarito da P2, 2011.1

Questão 1

item (a): Temos

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} = 2ye^z + 0 + x^2ye^z + 2z = (2 + x^2)ye^z + 2z$$

que *não* é identicamente nulo em $\mathbb{R}^3$. Sabemos que em um campo suave $\mathbf{F}$ em $\mathbb{R}^3$ é rotacional de um outro campo se, e somente $\nabla \cdot \mathbf{F} = \mathbf{0}$ em todo $\mathbb{R}^3$. Portanto o campo dado *não* admite potencial vetorial.

Por outro lado,

$$\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0},$$

em todo $\mathbb{R}^3$. Sabemos que um campo suave $\mathbf{F}$ em $\mathbb{R}^3$ é conservativo se, e somente se, $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$ em todo $\mathbb{R}^3$. Logo, o campo dado é conservativo, i.e., existe um potencial escalar f tal que $\mathbf{F} = \nabla f$.

item (b): Queremos achar um campo escalar f tal que $\mathbf{F} = \nabla f$ (pelo item anterior, já sabemos que tal f existe). Ou seja, temos de resolver o sistema:

$$\begin{cases} \partial_x f = 2xye^z \\ \partial_y f = x^2e^z \\ \partial_z f = x^2ye^z + z^2 \end{cases}$$

Integrando a 3a. equação em relação a z obtemos

$$f(x, y, z) = x^2ye^z + z^3/3 + h(x, y).$$

Substituindo na 2a. eq. obtemos

$$x^2e^z + \partial_y h(x, y) = x^2e^z \Rightarrow \partial_y h(x, y) = 0,$$

ou seja, h independe de y. Substituindo na 1a. eq. obtemos

$$2xye^z + h'(x) = 2xye^z \Rightarrow h'(x) = 0 \Rightarrow h(x) = c,$$

onde $c \in \mathbb{R}$ é uma constante. Assim, um potencial para $\mathbf{F}$ é $f(x, y, z) = x^2ye^z + z^3/3$.

Questão 2

item (a): Temos que $x^2 + y^2 = u^2(\cos^2 v + \operatorname{sen}^2 v) = u^2 = z$. Ou seja, a superfície pode ser descrita pela equação $z = g(x, y) = x^2 + y^2$ e portanto S é um parabolóide de base circular.

item (b): Como S pode ser parametrizada por $\mathbf{r}(x, y) = (x, y, x^2 + y^2)$, com $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, temos que

$$\mathbf{r}_x = (1, 0, 2x) \text{ e } \mathbf{r}_y = (0, 1, 2y) \Rightarrow \mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y = (-2x, -2y, 1) \neq \mathbf{0},$$

ou seja, S admite parametrização lisa, logo S tem plano tangente em todo ponto.

item (c): Usando a parametrização do item (b), um vetor normal a S no ponto $(1, 1, 2)$ é $\mathbf{n} = (-2, -2, 1)$. Logo, a eq. cartesiana do plano tangente a S em $(1, 1, 2)$ fica:

$$-2(x - 1) - 2(y - 1) + z - 2 = 0 \text{ ou ainda } z = 2 + 2(x - 1) + 2(y - 1).$$

Questão 3

item (a): Suponha que $P(x, y) = 0$. Nesse caso,

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = xy \Rightarrow Q(x, y) = \frac{x^2 y}{2} + g(y),$$

e escolhemos $g(y) = 0$. Assim, $\mathbf{F}(x, y) = (0, \frac{x^2 y}{2})$ é um campo que satisfaz a condição dada.

item (b): Seja $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x^2\}$. Pelo Teorema de Green, temos:

$$\int_0^1 \int_0^{x^2} xy \, dydx = \iint_D xydxdy = \iint_D (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})dxdy = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r},$$

onde C é a fronteira de D, percorrida em *sentido anti-horário* e que tem três partes: C_1, C_2 e C_3

A parte C_1 é o segmento horizontal $\{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1\}$ e

$$\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_1} Pdx + Qdy = 0,$$

pois $P=0$ e $y=0$ ao longo de C_1.

A parte C_2 é o segmento vertical $\{(1,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\le y\le 1\}$. Logo,

$$\int_{C_2}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}=\int_{C_2}Pdx+Qdy=\int_{C_2}Qdy=\int_0^1\frac{y}{2}dy=1/4.$$

A parte C_3 é o arco de parábola $\{(x,x^2)\in\mathbb{R}^2 : 0\le x\le 1\}$, mas que deve ser percorrido no sentido anti-horário, de acordo com o Teorema de Green. Logo,

$$\int_{C_3}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}=\int_{C_3}Pdx+Qdy=-\int_0^1\frac{x^4}{2}2xdx=-\int_0^1 x^5dx=-1/6.$$

Finalmente,

$$\int_0^1\int_0^{x^2}xy\,dydx=\int_C\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}=1/4-1/6=1/12.$$

Questão 4

item(a): **VERDADEIRO**.

Da regra do produto para o rotacional, temos:

$$\nabla\times(\varphi\mathbf{F})=\varphi\nabla\times\mathbf{F}+(\nabla\varphi)\times\mathbf{F}.$$

Por hipótese, $\varphi F=\nabla f$, logo $\nabla\times(\varphi\mathbf{F})=\nabla\times(\nabla f)=\mathbf{0}$. Então, como $\varphi\neq 0$, temos

$$\nabla\times\mathbf{F}=-\frac{1}{\varphi}(\nabla\varphi)\times\mathbf{F},$$

logo

$$\mathbf{F}\cdot(\nabla\times\mathbf{F})=-\frac{1}{\varphi}\mathbf{F}\cdot[(\nabla\varphi)\times\mathbf{F}]=\mathbf{0}.$$

item(b): **VERDADEIRO**.

Seja $F(x,y,z)=xy+z+3xz^5-4$. Então, $F(1,0,1)=0+1+3-4=0$. Além disso,

$$\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z)=1+15xz^4\Rightarrow\frac{\partial F}{\partial z}(1,0,1)=16\neq 0.$$

Logo, o Teorema da Função Implícita garante que a equação dada define (implícitamente) $z=f(x,y)$ para (x,y) numa vizinhança de $(1,0)$, de tal forma que nesta vizinhança, $F(x,y,f(x,y))=0$.