# P1 de Cálculo a Várias Variáveis I
MAT 1162 — 2012.2
14 de setembro de 2012

Nome: ______________________ Matrícula: __________
Assinatura: ______________________ Turma: __________

| Questão | Valor | Nota | Revisão |
|---|---|---|---|
| 1 | 4.0 | | |
| 2 | 4.0 | | |
| Teste | 2.0 | | |
| Total | 10.0 | | |

## Instruções

- Mantenha seu celular desligado durante toda a prova.
- Não é permitido usar nenhum tipo de calculadora ou dispositivo eletrônico.
- Não destaque as folhas da prova.
- A prova pode ser resolvida a lápis, caneta azul ou caneta preta. Não é permitido usar caneta vermelha ou verde.
- Você não tem o direito de consultar anotações.
- Desenvolva a solução de cada questão, de maneira clara e objetiva, na folha em que a mesma está enunciada. Utilize o verso da folha se necessário.
- <u>RESPOSTAS SEM JUSTIFICATIVAS NÃO SERÃO CONSIDERADAS</u>.

1. Considere a região plana $S$ definida por

$$S = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; -e^x \leq y \leq e^x \;,\; 0 \leq x \leq 2 \right\} .$$

Sejam $F(x, y)$ uma função contínua definida em $S$, e $I = \iint_S F(x, y)\, dxdy$.

(a) **(1.0)** Esboce $S$ e, ao lado, esboce o interior de $S$ (ou seja, o conjunto aberto obtido removendo-se de $S$ a sua fronteira).

(b) **(0.5)** Escreva a integral dupla $I$ na forma de uma integral iterada, integrando primeiro com respeito a $y$ e depois com respeito a $x$. (*Neste item não é pedido o cálculo da integral.*)

(c) **(1.5)** Calcule a coordenada $\bar{x}$ do centróide de $S$.

(d) **(0.5)** Calcule a área da região plana

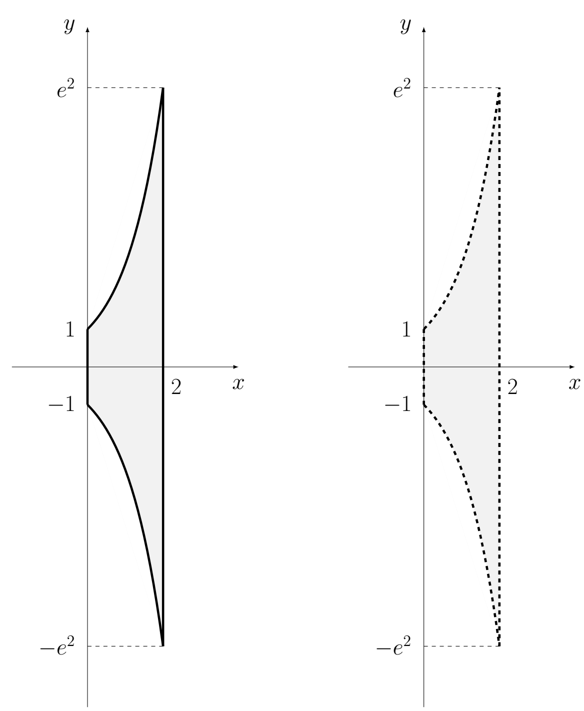
$$\tilde{S} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 0 \leq y \leq e^x \;,\; 0 \leq x \leq 2 \;,\; (x-1)^2 + y^2 \geq 1 \right\} .$$

(e) **(0.5)** Calcule o volume da região espacial

$$U = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; 0 \leq z \leq x, -e^x \leq y \leq e^x \;,\; 0 \leq x \leq 2 \right\} .$$

**Solução:**

(a) À esquerda temos o esboço da região $S$, e à direita o esboço de seu interior:



(b) Segue diretamente da descrição da região $S$ feita no enunciado e do esboço do item (a) que

$$\begin{aligned} I &= \iint_S F(x,y)\,dxdy \\ &= \int_0^2 \int_{-e^x}^{e^x} F(x,y)\,dy\,dx\,. \end{aligned}$$

(c) Sabe-se que

$$\bar{x} = \frac{1}{A(S)} \iint_S x\,dxdy\ ,$$

onde

$$A(S) = \iint_S 1\,dxdy\ .$$

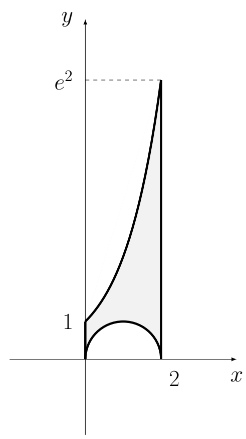
Logo, utilizando o item (b):

$$\begin{aligned} A(S) &= \int_0^2 \int_{-e^x}^{e^x} 1\,dy\,dx \\ &= 2\int_0^2 e^x\,dx \\ &= 2(e^2-1) \end{aligned}$$

E então,

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{1}{2(e^2-1)} \int_0^2 \int_{-e^x}^{e^x} x\,dy\,dx \\ &= \frac{1}{2(e^2-1)} \int_0^2 x\,y\Big|_{-e^x}^{e^x}\,dx \\ &= \frac{1}{e^2-1} \int_0^2 xe^x\,dx \\ &= \frac{2}{2(e^2-1)}(xe^x - e^x)\Big|_0^2 \\ &= \frac{1}{e^2-1}[(2e^2-e^2)+e^0] \\ &= \frac{e^2+1}{e^2-1}\ . \end{aligned}$$

(d) Um esboço da região plana $\tilde{S}$ é o seguinte:




Observe que a área de $\tilde{S}$ é dada por:

$$A(\tilde{S}) = \frac{A(S)}{2} - \frac{A(D)}{2} \, ,$$

onde

$$D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\; \Big| \;\; (x-1)^2 + y^2 \leq 1 \right\} \, .$$

Como $D$ nada mais é do que um disco de raio 1, sua área é:

$$A(D) = \pi \, . \, 1^2 = \pi \, .$$

Logo,

$$A(\tilde{S}) = e^2 - 1 - \frac{\pi}{2} \, .$$

(e) Observe que o volume de $U$ é dado pela seguinte integral:

$$\text{Vol}(U) = \iint_S x \, dxdy \;\; ,$$

a qual já foi calculada no item (c). Logo,

$$\text{Vol}(U) = 2(e^2 + 1) \, .$$

2. Considere a quádrica

$$-z^2 + x^2 + y^2 - 1 = 0 \ .$$

(a) **(1.0)** Desenhe a quádrica e identifique sua interseção com os seguintes planos:

- $x = 0$
- $y = 0$
- $z = c$ (para $c = 0$, $c > 0$ e $c < 0$).

(b) **(1.0)** Considere a região espacial

$$U = \Big\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ \Big| \ 1 + z^2 \leq x^2 + y^2 \leq 5 \Big\} \ .$$

Escreva a fronteira de $U$ usando igualdades ou desigualdades.

(c) **(0.5)** Seja

$$V = U \cap \{z \geq 0\} \ .$$

Escreva o volume de $V$ na forma

$$\iint_R F(x, y) \, dxdy \ ,$$

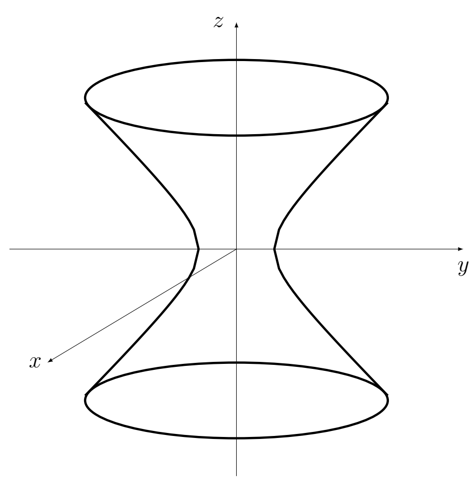
explicitando $F(x, y)$ e $R$. (*Dica: Neste item não são pedidos os limites de integração. Utilize desigualdades para descrever a região de integração R.*)

(d) **(1.0)** Calcule o volume de $V$. (*Dica: Utilize coordenadas polares.*)

(e) **(0.5)** Calcule o volume de $U$.

**Solução:**

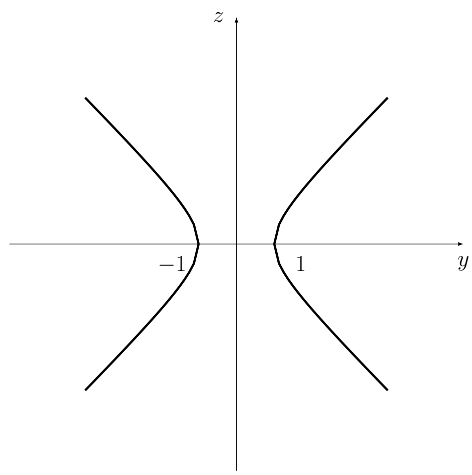
(a) A quádrica é um hiperbolóide de uma folha, cujo esboço é o seguinte:



A curva de interseção entre o hiperbolóide e o plano $x = 0$ tem a seguinte equação:

$$-z^2 + 0^2 + y^2 - 1 = 0 \;\Rightarrow\; y^2 - z^2 = 1$$

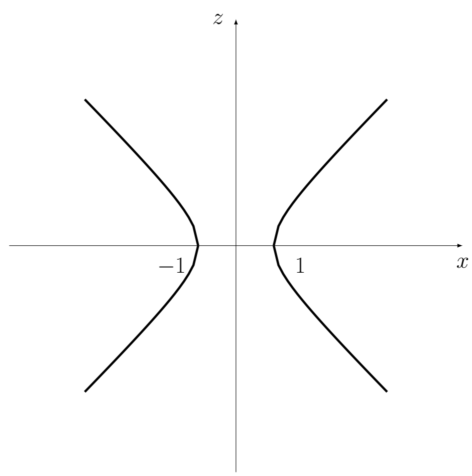
ou seja, é uma hipérbole.




A curva de interseção entre o hiperbolóide e o plano $y = 0$ tem a seguinte equação:

$$-z^2 + x^2 + 0^2 - 1 = 0 \;\Rightarrow\; x^2 - z^2 = 1$$

ou seja, é uma hipérbole.




As curvas de interseção entre o hiperbolóide e os planos $z = c$ têm as seguintes equações:

- $c = 0$

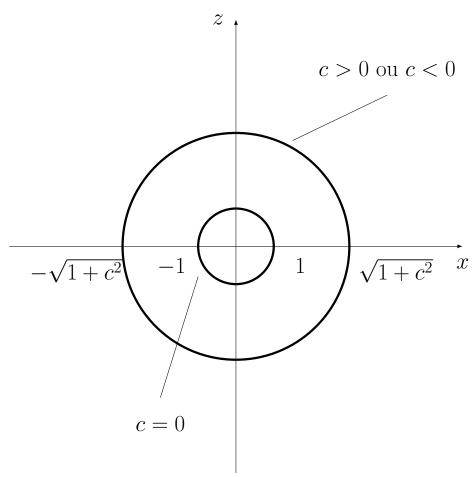
$$-0^2 + x^2 + y^2 - 1 = 0 \;\Rightarrow\; x^2 + y^2 = 1 \text{ (círculo de raio 1)}$$

- $c > 0$

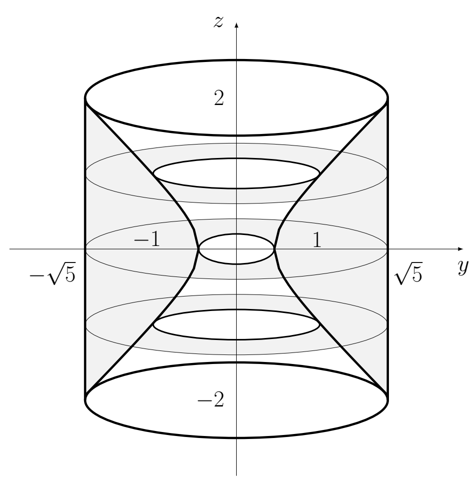
$$-c^2 + x^2 + y^2 - 1 = 0 \ \Rightarrow\ x^2 + y^2 = 1 + c^2 \text{ (círculo de raio } \sqrt{1+c^2}\text{)}$$

- $c < 0$

$$-c^2 + x^2 + y^2 - 1 = 0 \ \Rightarrow\ x^2 + y^2 = 1 + c^2 \text{ (círculo de raio } \sqrt{1+c^2}\text{)}$$




(b) A região espacial $U$ é aquela externa ao hiperbolóide $x^2 + y^2 = 1 + z^2$ e interna ao cilindro $x^2 + y^2 = 5$, como mostrado abaixo:




A fronteira de $U$ é composta por duas superfícies: $S_1$ e $S_2$ (lateral interna e lateral externa).

A interseção do hiperbolóide $x^2 + y^2 = 1 + z^2$ com o cilindro $x^2 + y^2 = 5$ ocorre em $5 = 1 + z^2 \ \Rightarrow\ z = \pm 2$.

Assim,

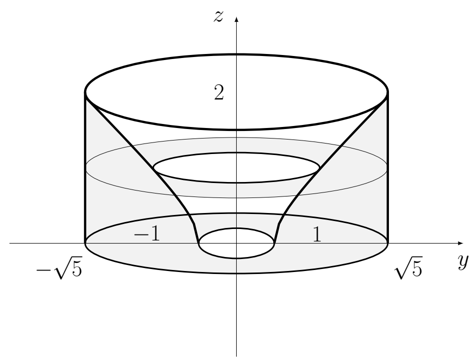
- Lateral interna:

$$S_1 = \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\;\Big|\;\; x^2+y^2 = 1+z^2 \;,\; -2 \le z \le 2\Big\}$$

- Lateral externa:

$$S_2 = \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\;\Big|\;\; x^2+y^2 = 5 \;,\; -2 \le z \le 2\Big\}$$

(c) Um esboço da região espacial $V$ é dado abaixo:




A tampa de cima de $V$ é a parte superior do hiperbolóide:

$$x^2+y^2 = 1+z^2 \;\Rightarrow\; z = \sqrt{x^2+y^2-1}\,.$$

A tampa de baixo de $V$ é o plano $z=0$.

A projeção ortogonal de $V$ no plano $xy$ é um anel: o círculo interior é a interseção do hiperbolóide com o plano $z=0$ (logo, o raio é igual a 1), e o círculo exterior é a projeção ortogonal do cilindro no plano $xy$ (logo, o raio é igual a $\sqrt{5}$).

Logo,

$$\mathrm{Vol}(V) = \iint_R F(x,y)\,dxdy\;,$$

onde

$$F(x,y) = \sqrt{x^2+y^2-1} - 0 = \sqrt{x^2+y^2-1}$$

e

$$R = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\;\Big|\;\; 1 \le x^2+y^2 \le 5\Big\}\;.$$

(d) Para o cálculo do volume de $V$, a maneira mais prática de descrever a região de integração $R$ é através de coordenadas polares: $1 \le r \le \sqrt{5}$, $0 \le \theta \le 2\pi$.

Assim,

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Vol}(V) &= \iint_R F(x,y)\,dxdy \\
&= \iint_R \sqrt{x^2+y^2-1}\,dxdy \\
&= \int_0^{2\pi}\int_1^{\sqrt{5}} \sqrt{r^2-1}\ r\,drd\theta \\
&= 2\pi \int_1^{\sqrt{5}} r\sqrt{r^2-1}\,dr \\
&= \pi \int_1^{\sqrt{5}} 2r\sqrt{r^2-1}\,dr \\
&= \pi \frac{2(r^2-1)^{3/2}}{3}\Big|_1^{\sqrt{5}} \\
&= \frac{2\pi}{3}\left[(5-1)^{3/2}-0\right] \\
&= \frac{16\pi}{3}\,.
\end{aligned}
$$

(e) Pelos esboços de $U$ e $V$ feitos nos itens anteriores, temos que o volume de $U$ é o dobro do volume de $V$. Logo, utilizando o item (d), temos que

$$\mathrm{Vol}(U) = 2\mathrm{Vol}(V) = \frac{32\pi}{3}\,.$$

**Folha de Rascunho**