MAT1004 G1 solução

1ª parte

1. Considere a tabela abaixo, onde t representa o tempo em anos após 1988, quando ocorreu o derramamento acidental de uma grande quantidade de poluente em uma lagoa. f(t) representa a concentração, em partes por milhão, do poluente na lagoa a cada 2 anos após o acidente de 1988.

t	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
f(t)	10	7,9	6,3	5	3,9	3,1	2,5	2	1,5	1,2	1

a)Faça a melhor estimativa que puder para a integral de f de 0 até 20. Justifique sua escolha. Atenção: Neste item não podemos supor que f seja decrescente.e

b)Supondo agora que f é decrescente, ache os dois valores melhores possíveis c1<c2, tais que se possa garantir que a integral está entre c1 e c2.

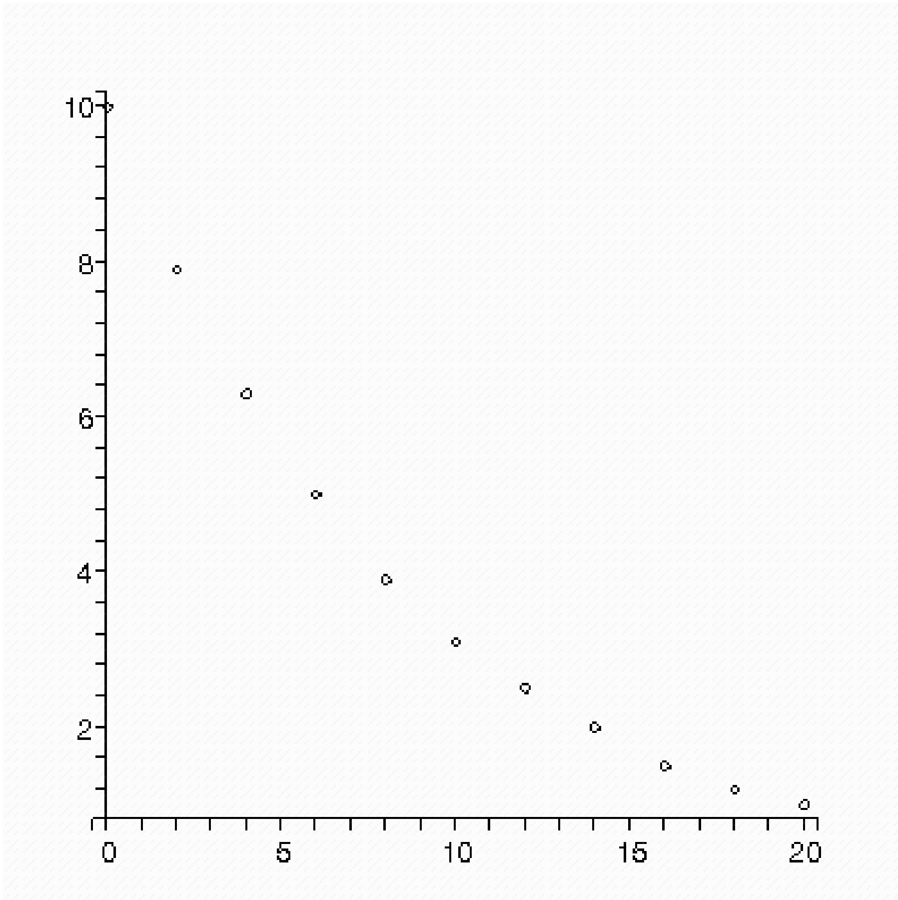
```
> restart;

>
lista:=[[0,10],[2,7.9],[4,6.3],[6,5],[8,3.9],[10,3.1],[12,2.5
],[14,2],[16,1.5],[18,1.2],[20,1]];
```

$lista := [[0, 10], [2, 7.9], [4, 6.3], [6, 5], [8, 3.9], [10, 3.1], [12, 2.5], [14, 2], [16, 1.5], [18, 1.2], [20, 1]]$

```
> with(plots):
Warning, the name changecoords has been redefined

> pointplot(lista);
```



lembrando:

```
> lista[1];
```

$$[0, 10]$$

```
> lista[1,2];
```

$$10$$

```
> for k from 0 to 10 do
a[k]:=lista[k+1,2];
end do;
```

$$a_0 := 10$$

$$a_1 := 7.9$$

$$a_2 := 6.3$$

$$a_3 := 5$$

$$a_4 := 3.9$$

$$a_5 := 3.1$$

$$a_6 := 2.5$$

$$a_7 := 2$$

$$a_8 := 1.5$$

$$a_9 := 1.2$$

$$a_{10} := 1$$

```
>  #usando simpson que dá melhor aproximação que retangulos
ou trapezios.
> dx:=2;
```

$$dx := 2$$

```
>
soma:=dx/3*(a[0]+4*sum(a[2*n+1],n=0..4)+2*sum(a[2*m],m=1..4)+
a[10]);
```

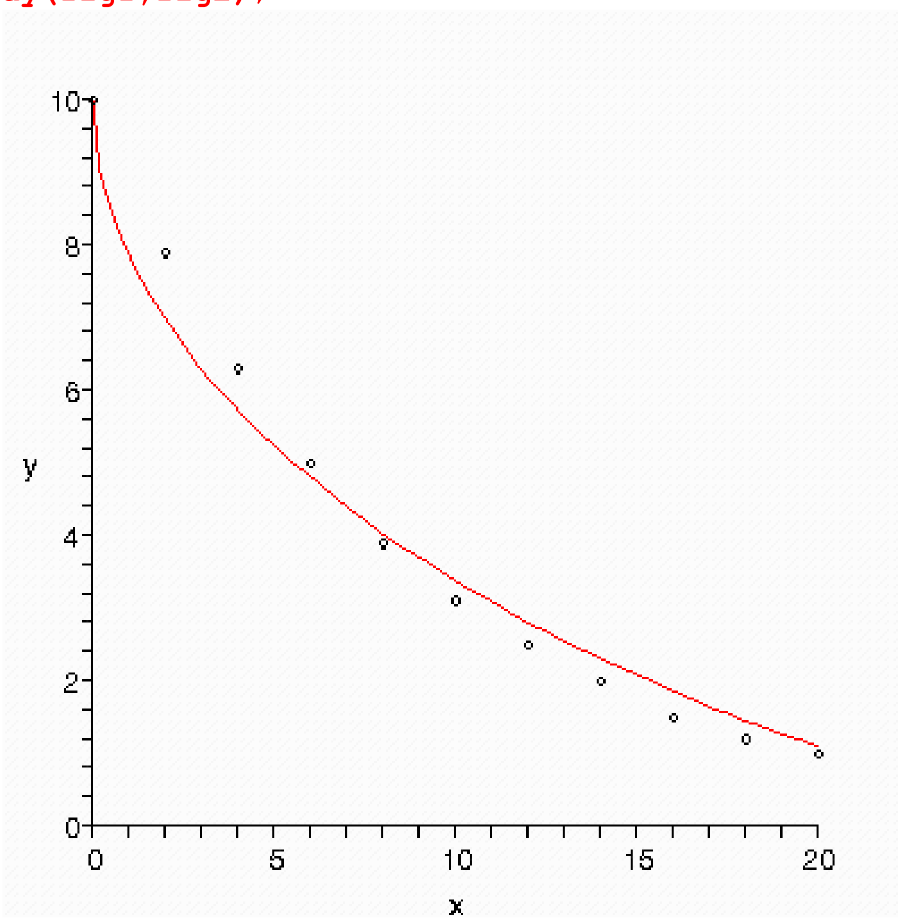
$$soma := 77.46666667$$

```
> # usando trapezios:
> somaT:=sum(a[n]*dx,n=1..9)+(a[0]/2+a[10]/2)*dx;
```

$$somaT := 77.8$$

podemos também procurar uma função que aproxime os pontos e fazer sua integral, como por exemplo esta abaixo.

```
> fig1:=plot(10-2.15*sqrt(x)+0.0018*x^2,x=0..20,y=0..10):
> fig2:=pointplot(lista):
> display(fig1,fig2);
```




```
> int(10-2.15*sqrt(x)+0.0018*x^2,x=0..20);
```

$$76.5987693$$

```
> #outra possibilidade para o item a era usar ponto medio com
5 termos:
>
> sum(a[2*n+1]*2*dx,n=0..4);
```

$$76.8$$

```
>
>
```

supondo a função decrescente, podemos garantir que a integral está entre a soma pela esquerda e e a soma pela direita.

```
>
> somaesq:=sum(a[n]*dx,n=0..9);
```

$$somaesq := 86.8$$

```
> somadir:=sum(a[n]*dx,n=1..10);
```

$$somadir := 68.8$$

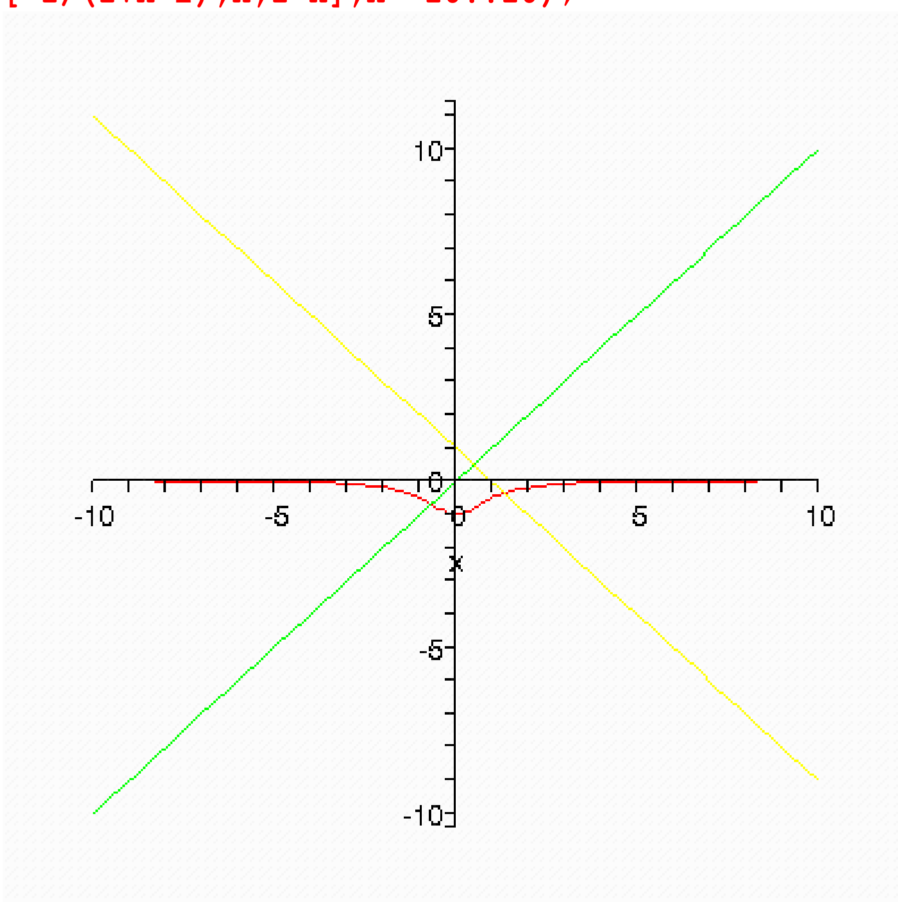
então c1= 68,8 e c2=86,6.

```
>
```

2. a) Faça uma figura mostrando a região limitada pela curva y=-1/(1+x^2) e pelas retas y=x e x+y=1.

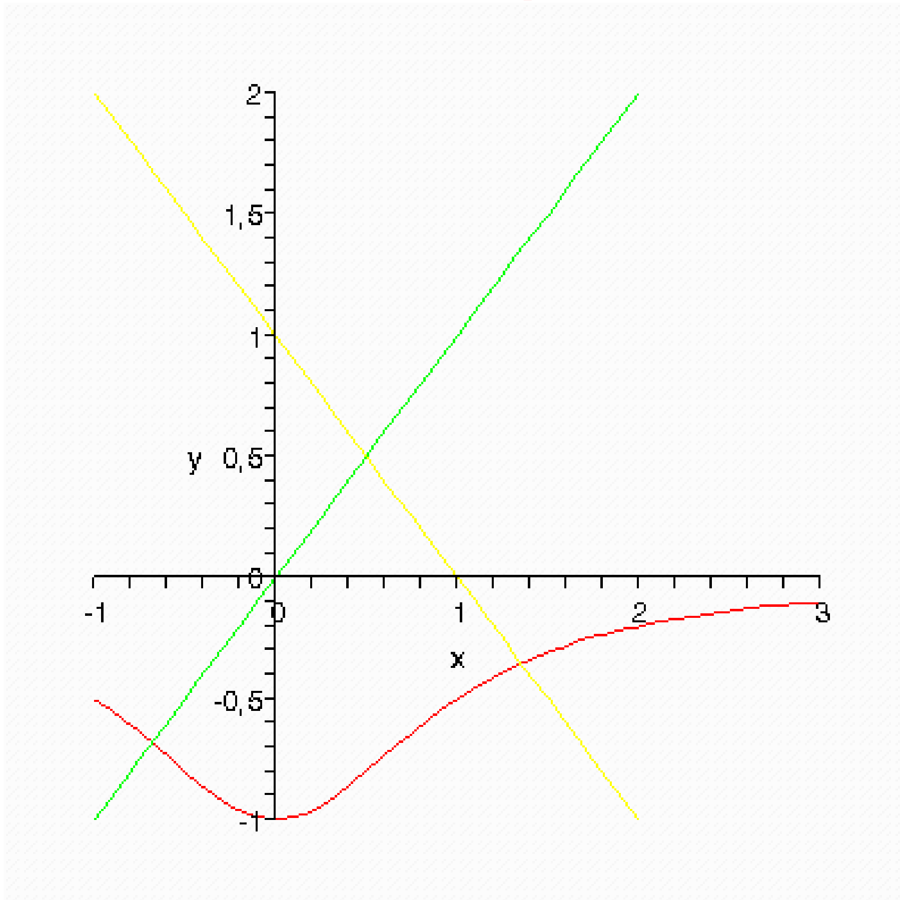
b) Calcule a área da região definida acima.

```
> plot([-1/(1+x^2),x,1-x],x=-10..10);
```



melhorando a figura:

```
> plot([-1/(1+x^2),x,1-x],x=-1..3,y=-1..2);
```



as retas se cortam em (1/2,1/2), falta achar a interseção da curva e das reta y=x. e y=1-x.

```
> a:=fsolve(x=-1/(1+x^2),x=-1..0);
```

$$a := -.6823278038$$

```
> b:=fsolve(1-x=-1/(1+x^2),x=0..2);
```

$$b := 1.353209964$$

```
>
>
> area:=int(x-(-1/(1+x^2)),x=a..1/2)+int(1-x-(-
1/(1+x^2)),x=1/2..b);
```

$$area := 1.487985512$$

2ª parte

1.. Achar a equação da reta tangente a y=F(x) no ponto (π/2,5), sendo

$$F(x)=5+\int_{\pi/2}^{x}\frac{sen(t)}{t}\,dt$$

A equação da reta tangente ao gráfico y=F(x) no ponto (x_0,y_0) é $y-F(x_0) = F'(x_0)(x-x_0)$.

Temos $x_0 = \pi/2$, $y_0=5$, $F'(x_0) = sen(x_0)/x_0$. Substituindo os valores, vem: $y-5= [1/(\pi/2)] (x- \pi/2)$ ou seja $y-5=(2/\pi)(x- \pi/2)$, ou $y=2x/\pi +4$.

2 Resolva as integrais :

$$\int \frac{x^4 + 3x^2 + 5}{x} dx$$

Separando em 3, vem : $\int \frac{x^4}{x} dx + \int \frac{3x^2}{x} dx + \int \frac{5}{x} dx$ que dá $x^4/4 + 3x^2/2 + 5 \, Ln|x|.+ C$

$$\int_1^4 x\sqrt{x}\, dx = \int_1^4 x^{3/2} dx = \left[\frac{x^{5/2}}{5/2} \right]_1^4 = (4^{5/2} - 4)2/5=$$

$=56/5$,

$$\int_0^1 \sqrt{x+3}\, dx$$

fazemos a substituição $x+3 =u$, que leva a $dx=du$ e se x vai de 0 a 1, u vai de 3 a 4 . A integral fica:

$$\int_3^4 \sqrt{u}\, du = \int_3^4 u^{1/2} du = \left[\frac{u^{3/2}}{3/2} \right]_3^4 = (8- \sqrt{27})2/3=$$

$16/3 - \sqrt{3}$

$$\int 3x sen(x^2 - 5) dx$$

fazendo $u= x^2 -5$, vem $du = 2xdx$ e a integral fica

$$\int 3 sen(u) du/2 = -3\cos(u)/2 + C = -3\cos(x^2-5)/2 + C$$

3. a)Faça uma figura da região limitada pela curva $x=y^2-2y$ e pela reta $y=(x+3)/2$.

b)Ache a área da região do item (a) .

a) <u>Figura da região (fica mais fácil se trocamos as posições dos eixos)</u>

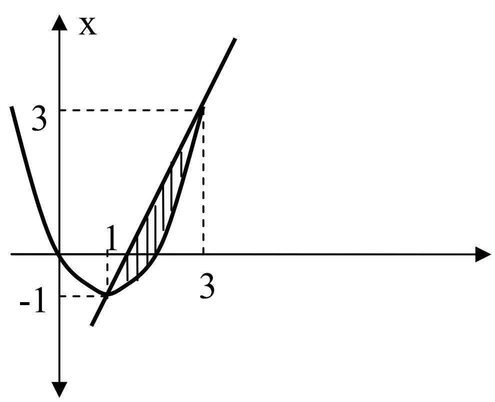
$x = f(y) = y^2 - 2y = y(y - 2)$: polinômio do 2o grau (parábola)

- concavidade para cima
- interseções do gráfico de f(y) com eixo y : (y) = 0 = $y^2 - 2y \Rightarrow$ **y = 0 e y = 2**
- $f'(y) = 2y - 2 = 0 \Rightarrow y = 1$ (ponto de mínimo) com $f(1) = -1$

Inversão de $y = (x+3)/2 \Rightarrow x = g(y) = 2y - 3$ (reta)

- interseções da reta com a parábola $\Rightarrow y^2 - 2y = 2y - 3 \Rightarrow y = 1$ e $y = 3$.

$f(1) = g(1) = -1$ e $f(3) = g(3) = 3$



b) <u>Área da região</u>

$$A = \int_1^3 [g(y) - f(y)]dy = \int_1^3 (2y - 3 - y^2 + 2y)dy = [-\frac{y^3}{3} + 2y^2 - 3y]_1^3 = \mathbf{4/3}$$

1ª parte 2ª versão

1. Considere a tabela abaixo, onde t representa o tempo em anos após 1988, quando ocorreu o derramamento acidental de uma grande quantidade de poluente em uma lagoa. f(t) representa a concentração, em partes por milhão, do poluente na lagoa a cada 2 anos após o acidente de 1988.

t	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
f(t)	100	87	70	65	40	31	24	21	13	10	1

a)Faça a melhor estimativa que puder para a integral de f de 0 até 18. Justifique sua escolha. Atenção: Neste item não podemos supor que f seja decrescente.e

b)Supondo agora que f é decrescente, ache os dois valores melhores possíveis c1<c2, tais que se possa garantir que a integral está entre c1 e c2.

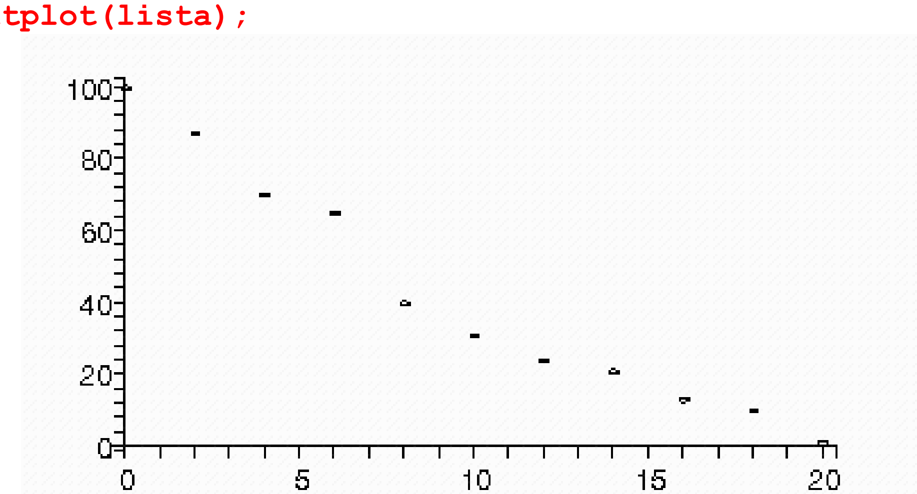
```
> restart;

>
lista:=[[0,100],[2,87],[4,70],[6,65],[8,40],[10,31],[12,24],[
14,21],[16,13],[18,10],[20,1]];
```

lista := [[0, 100], [2, 87], [4, 70], [6, 65], [8, 40], [10, 31], [12, 24], [14, 21], [16, 13], [18, 10], [20, 1]]

```
> with(plots):
Warning, the name changecoords has been redefined

> pointplot(lista);
```



lembrando:

```
> lista[1];
```

[0, 100]

```
> lista[1,2];
```

100

```
> for k from 0 to 10 do
```

```
a[k]:=lista[k+1,2];
end do;
```

$$a_0 := 100$$

$$a_1 := 87$$

$$a_2 := 70$$

$$a_3 := 65$$

$$a_4 := 40$$

$$a_5 := 31$$

$$a_6 := 24$$

$$a_7 := 21$$

$$a_8 := 13$$

$$a_9 := 10$$

$$a_{10} := 1$$

```
>  aqui vamos usar o método dos trapézios. Simpson não serve
porque são 9 intervalos (de 0 a 18).
> dx:=2;
```

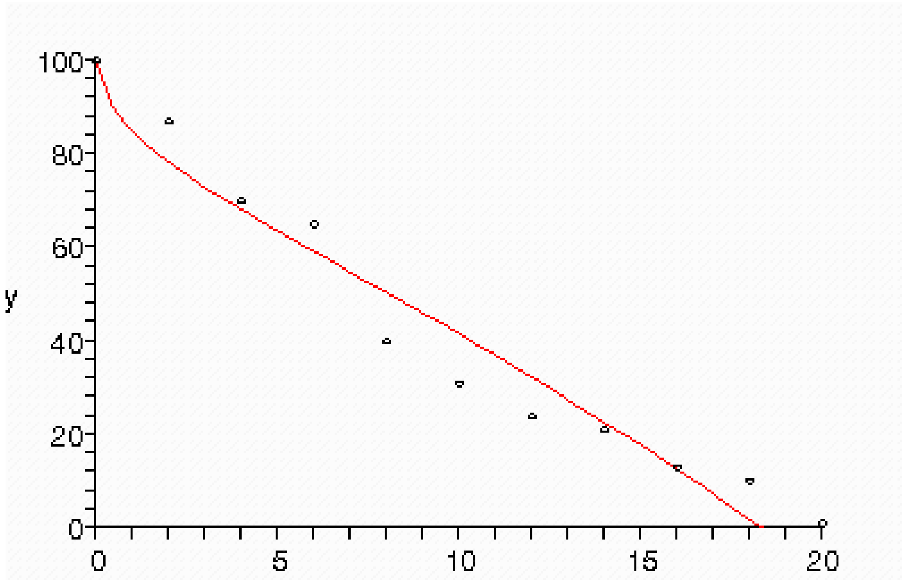
$$dx := 2$$

```
>
> somaT:=sum(a[n]*dx,n=1..8)+(a[0]/2+a[9]/2)*dx;
```

$$somaT := 812$$

podemos também procurar uma função que aproxime os pontos e fazer sua integral, como por exemplo esta abaixo.

```
> fig1:=plot(100-15*sqrt(x)-0.13*x^(1.93),x=0..20,y=0..100):
> fig2:=pointplot(lista):
> display(fig1,fig2);
```




```
> evalf(int(100-15*sqrt(x)-0.13*x^(1.93),x=0..20));
```

817.7709337

```
>
>
```

supondo a função decrescente, podemos garantir que a integral está entre a soma pela esquerda e e a soma pela direita.

```
>
> somaesq:=sum(a[n]*dx,n=0..8);
```

somaesq := 902

```
> somadir:=sum(a[n]*dx,n=1..9);
```

somadir := 722

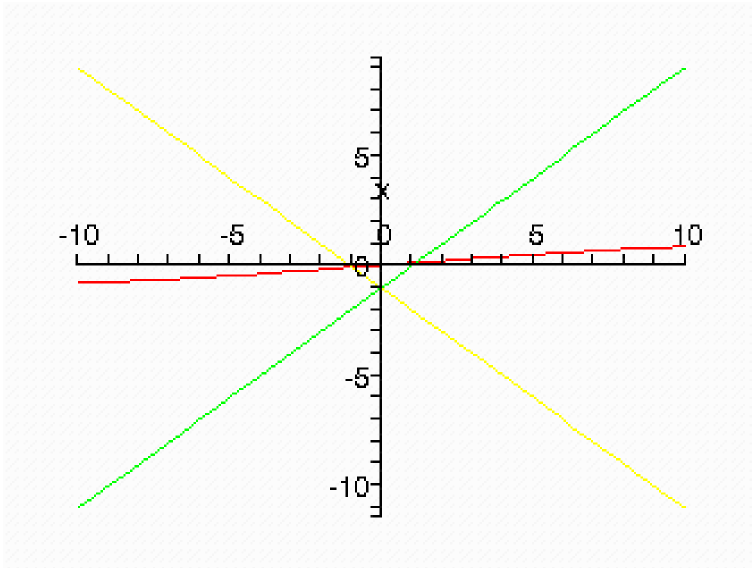
então c1= 722 e c2=902.

```
>
```

2. a) Faça uma figura mostrando a região limitada pela curva y=sen(x/10) e pelas retas y=x-1 e x+y=-1.

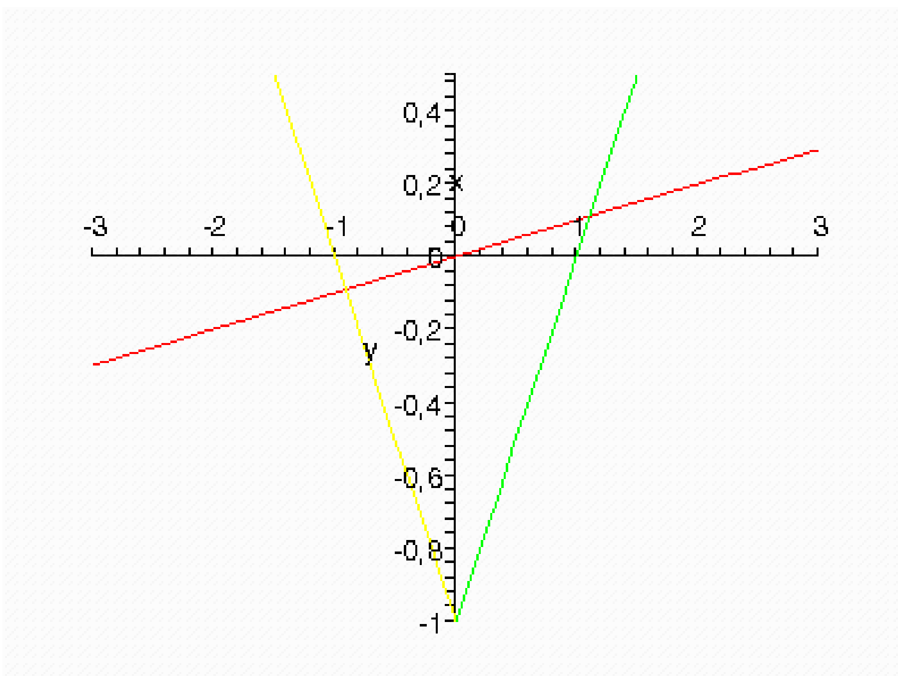
b) Calcule a área da região definida acima

```
> plot([sin(x/10),x-1,-1-x],x=-10..10);
```



melhorando a figura:

```
> plot([sin(x/10),x-1,-1-x],x=-3..3,y=-1..1/2);
;
```



as retas se cortam em (0,-1), falta achar a interseção da curva e das retas

```
> a:=fsolve(-1-x=sin(x/10),x=-1..0);
```

$$a := -.9092047404$$

```
> b:=fsolve(-1+x=sin(x/10),x=0..2);
```

$$b := 1.110857415$$

```
>
> area:=int(sin(x/10)-(-1-x),x=a..0)+int(sin(x/10)-(-
1+x),x=0..b);
```

$$area := 1.010066017$$