Gabarito da P1, 2011.1

Questão 1

Temos que $u(x,y) = f(x/y) = f(g(x,y)) = (f \circ g)(x,y)$, onde $g(x,y) = x/y$ $(y \neq 0)$. Portanto temos uma composição de funções diferenciáveis. Aplicando a Regra da Cadeia, temos:

$\nabla u(x,y) = Df(g(x,y)).\nabla g(x,y) = f'(x/y)\nabla g(x,y) = f'(x/y)\big(1/y, -x/y^2\big)$,

ou seja

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}(x,y) = f'(x/y).\dfrac{1}{y} \\ \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,y) = -f'(x/y).\dfrac{x}{y^2}. \end{cases}$$

Portanto,

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = xf'(x/y).\frac{1}{y} - yf'(x/y).\frac{x}{y^2} = f'(x/y).(\frac{x}{y} - \frac{x}{y}) = 0.$$

Questão 2

Em $[0, \pi/2]$ o movimento é descrito por $\mathbf{r}(t)$, com vetor velocidade dado por $\mathbf{r}'(t) = (-2\,\mathrm{sen}(2t), 2\cos(2t), \sqrt{5})$ e a distância percorrida é dada por

$$L_1 = \int_0^{\pi/2} \|\mathbf{r}'(t)\|\, dt = \int_0^{\pi/2} \sqrt{4\mathrm{sen}^2(2t) + 4\mathrm{cos}^2(2t) + 5}\, dt$$

$$= \int_0^{\pi/2} \sqrt{9}\, dt = 3\pi/2.$$

No intervalo $[\pi/2, \pi]$, o movimento é retilíneo uniforme com velocidade $\mathbf{v} = \mathbf{r}'(\pi/2) = (0, -2, \sqrt{5})$, de forma que a posição da partícula no instante π é dada por $\mathbf{p} = \mathbf{r}(\pi/2) + (\pi/2)\mathbf{v}$. Assim, a distância percorrida nesse trecho é dada por

$$L_2 = \|\mathbf{p} - \mathbf{r}(\pi/2)\| = \|(\pi/2)\mathbf{v}\| = (\pi/2)\|((0, -2, \sqrt{5})\| = 3\pi/2.$$

Finalmente, a distância total percorrida em $[0, \pi/2]$ é $L_1 + L_2 = 3\pi$.

Questão 3

item (a): Queremos que a reta de equação $v = u$ seja levada, sob T, na parábola de equação $y = x^2$. A transformação $(x, y) = T(u, v) = (u, v^2)$ tem essa propriedade. De fato, se $u = v$, então $(x, y) = T(u, u) = (u, u^2)$, portanto $y = u^2 = x^2$. O lado do triângulo dado por $v = 0$, $0 \leq u \leq 1$ corresponde ao segmento $y = 0$, $0 \leq x \leq 1$, e o lado $u = 1$, $0 \leq v \leq 1$ corresponde ao segmento $x = 1$, $0 \leq v^2 = y \leq 1$.

A transformação é injetora: $T(u, v) = T(U, V)$ implica $u = U$ e $v^2 = V^2$, e como $0 \leq v, V \leq 1$, segue que $v = V$.

item (b): A matriz Jacobiana de T é

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2v \end{bmatrix}$$

que tem determinante $2v > 0$, a menos dos pontos da forma $(u, 0)$, isto é, um lado do triângulo, que é um conjunto de área zero. Assim, a Fórmula de Mudança de Variáveis se aplica e temos:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^u u\, v^2 (2v) dv\, du = 2 \int_0^1 \int_0^u u v^3 dv\, du &= \frac{2}{4} \int_0^1 u v^4 \Big]_0^u du \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 u^5 du = \frac{1}{2} \Big[\frac{1}{6} u^6\Big]_0^1 = \frac{1}{12}. \end{aligned}$$

item(c): Temos

$$\int_0^1 \int_0^{x^2} xy\, dy\, dx = \frac{1}{2} \int_0^1 xy^2 \Big]_0^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 x^5 dx = \frac{1}{12}.$$

Questão 4

item(a): **FALSO**. Por exemplo, o campo $\mathbf{F}(x, y) = (2xy + \cos x, x^2)$ é conservativo, com potencial $f(x, y) = x^2 y + \mathrm{sen} x$, e temos

$$\frac{\partial P}{\partial x}(x, y) = 2y - \mathrm{sen} x \neq \frac{\partial Q}{\partial y}(x, y) = 0.$$

item(a): **VERDADEIRO**. Temos uma integral de linha do campo vetorial $\mathbf{F}(x,y,z) = (x, y, xz - y)$ em $\mathbb{R}^3$, sobre a curva $\mathbf{r}(t) = (t^2, 2t, 4t^3)$. Então:

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 (t^2, 2t, 4t^5 - 2t) \cdot (2t, 2, 12t^2) dt = \int_0^1 (2t^3 + 4t + 48t^7 - 24t^3) dt =$$

$$\int_0^1 (-22t^3 + 4t + 48t^7) dt = \Big[-\frac{22}{4} t^4 + 2t^2 + 6t^8 \Big]_0^1 = -\frac{11}{2} + 8 = \frac{5}{2}.$$