P1 de Cálculo a Várias Variáveis I

MAT 1162 — 2012.2

30 de novembro de 2012

Nome: ______________________________ Matrícula: ____________

Assinatura: ______________________________ Turma: ____________

Questão	Valor	Nota	Revisão
1	3.0		
2	2.0		
3	3.0		
Teste	2.0		
Total	10.0		

Instruções

- Mantenha seu celular desligado durante toda a prova.
- Não é permitido usar nenhum tipo de calculadora ou dispositivo eletrônico.
- Não destaque as folhas da prova.
- A prova pode ser resolvida a lápis, caneta azul ou caneta preta. Não é permitido usar caneta vermelha ou verde.
- Você não tem o direito de consultar anotações.
- Desenvolva a solução de cada questão, de maneira clara e objetiva, na folha em que a mesma está enunciada. Utilize o verso da folha se necessário.
- <u>RESPOSTAS SEM JUSTIFICATIVAS NÃO SERÃO CONSIDERADAS</u>.

1. Considere a função

$$f(x, y) = y^3 + 3x^2y - 3x^2 - 3y^2 + 2.$$

   (a) **(1.0)** Encontre todos os pontos críticos de f.

   (b) **(2.0)** Classifique os pontos críticos de f quanto a sua natureza (máximo local, mínimo local ou sela).

Solução:

(a) Observe que

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= 6xy - 6x \\ &= 6x(y - 1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_y(x, y) &= 3y^2 + 3x^2 - 6y \\ &= 3(y^2 + x^2 - 2y). \end{aligned}$$

Temos que $f_x(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $y = 1$.

Se $x = 0$, então $f_y(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = 0$ ou $y = 2$.

Se $y = 1$, então $f_y(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ou $x = -1$.

Logo, os pontos críticos de f são:
$P_1 = (0, 0)$, $P_2 = (0, 2)$, $P_3 = (1, 1)$ e $P_4 = (-1, 1)$.

(b) A matriz hessiana de f é dada por

$$Hf(x, y) = \begin{bmatrix} 6(y-1) & 6x \\ 6x & 6(y-1) \end{bmatrix}.$$

Em P_1 temos

$$Hf(P_1) = \begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -6 \end{bmatrix},$$

cujos autovalores são $\lambda_1 = -6$ e $\lambda_2 = -6$.

Logo, P_1 é ponto de máximo local.

Em P_2 temos

$$Hf(P_2) = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix},$$

cujos autovalores são $\lambda_1 = 6$ e $\lambda_2 = 6$.

Logo, P_2 é ponto de mínimo local.

Em P_3 temos

$$Hf(P_3) = \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 6 & 0 \end{bmatrix},$$

cujos autovalores são $\lambda_1 = 6$ e $\lambda_2 = -6$.

Logo, P_3 é ponto de sela.

Em P_4 temos

$$Hf(P_4) = \begin{bmatrix} 0 & -6 \\ -6 & 0 \end{bmatrix},$$

cujos autovalores são $\lambda_1 = 6$ e $\lambda_2 = -6$.

Logo, P_4 é ponto de sela.

2. **(2.0)** Encontre o máximo global da função

$$f(x,y,z) = 8xyz,$$

restrita ao elipsóide

$$2x^2 + 3y^2 + z^2 = 18,$$

usando obrigatoriamente o método dos multiplicadores de Lagrange.

Solução:

Precisamos resolver o seguinte sistema

$$\begin{aligned} 8yz &= 4x\lambda && (1) \\ 8xz &= 6y\lambda && (2) \\ 8xy &= 2z\lambda && (3) \\ 2x^2 + 3y^2 + z^2 &= 18. && (4) \end{aligned}$$

Se $\lambda = 0$ então as equações (1), (2) e (3) implicam que $x = 0$ ou $y = 0$ ou $z = 0$. Em qualquer um desses casos temos que $f(x,y,z) = 0$, que não é o máximo global. Note também que o ponto $(0,0,0)$ não é candidato a extremo, pois não pertence ao elipsóide $2x^2 + 3y^2 + z^2 = 18$.

Multiplicando a eq.(1) por x, a eq.(2) por y e a eq.(3) por z obtemos que

$$4x^2\lambda = 6y^2\lambda = 2z^2\lambda.$$

Se $\lambda \neq 0$ então $z^2 = 3y^2 = 2x^2$. Substituindo na eq.(4) temos que:

- $3z^2 = 18$, donde $z = \pm\sqrt{6}$
- $9y^2 = 18$, donde $y = \pm\sqrt{2}$
- $6x^2 = 18$, donde $x = \pm\sqrt{3}$

Assim, temos como candidatos a máximo global os seguintes pontos:
$P_1 = (\sqrt{3}, \sqrt{2}, \sqrt{6})$, $P_2 = (\sqrt{3}, \sqrt{2}, -\sqrt{6})$, $P_3 = (\sqrt{3}, -\sqrt{2}, \sqrt{6})$,
$P_4 = (\sqrt{3}, -\sqrt{2}, -\sqrt{6})$, $P_5 = (-\sqrt{3}, \sqrt{2}, \sqrt{6})$, $P_6 = (-\sqrt{3}, \sqrt{2}, -\sqrt{6})$,
$P_7 = (-\sqrt{3}, -\sqrt{2}, \sqrt{6})$ e $P_8 = (-\sqrt{3}, -\sqrt{2}, -\sqrt{6})$.

A funcão f assume o máximo global nos pontos P_1, P_4, P_6 e P_7, onde o valor máximo global é $f(x,y,z) = 48$.

3. Considere a função $f : U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

onde

$$U = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x^2+y^2+z^2 \le 2 \;\; e \;\; z \ge 1 \right\},$$

e a integral tripla

$$I = \int\int\int_U f(x,y,z)dxdydz.$$

(a) **(0.5)** Esboce corretamente a região U, indicando no desenho sua fronteira.

(b) **(1.0)** Escreva I na forma de uma integral iterada, usando obrigatoriamente coordenadas esféricas (ρ, φ, θ). (*Neste item não é pedido o cálculo da integral.*)

(c) **(0.5)** Escreva I na forma de uma integral iterada, usando obrigatoriamente coordenadas cilíndricas (r, θ, z). (*Neste item não é pedido o cálculo da integral.*)

(d) **(1.0)** Calcule I.

Solução:

(a) INSERIR FIGURA

(b) Em coordenadas esféricas a função f tem a seguinte forma

$$\tilde{f}(\rho, \varphi, \theta) = \frac{1}{\rho}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} \int_{\sec\varphi}^{\sqrt{2}} \frac{\rho^2 \sin\varphi}{\rho} d\rho d\varphi d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} \int_{\sec\varphi}^{\sqrt{2}} \rho \sin\varphi d\rho d\varphi d\theta. \end{aligned}$$

(c) Em coordenadas cilíndricas a função f tem a seguinte forma

$$\tilde{\tilde{f}}(r, \theta, z) = \frac{1}{\sqrt{r^2+z^2}}.$$

Assim,

$$I = \int_0^{2\pi}\int_1^{\sqrt{2}}\int_0^{\sqrt{2-z^2}} \frac{r}{\sqrt{r^2+z^2}} dr dz d\theta.$$

(d) Vamos usar a expressão em coordenadas cilíndricas para fazer o cálculo da integral tripla:

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^{2\pi}\int_1^{\sqrt{2}}\int_0^{\sqrt{2-z^2}} \frac{r}{\sqrt{r^2+z^2}} dr dz d\theta \\
&= 2\pi \int_1^{\sqrt{2}}\int_0^{\sqrt{2-z^2}} \frac{r}{\sqrt{r^2+z^2}} dr dz \\
&= 2\pi \int_1^{\sqrt{2}} \sqrt{r^2+z^2}\,\Big|_{r=0}^{\sqrt{2-z^2}} dz \\
&= 2\pi \int_1^{\sqrt{2}} \left(\sqrt{2}-z\right) dz \\
&= 2\pi \left(\sqrt{2}z\Big|_{z=1}^{\sqrt{2}} + \frac{z^2}{2}\Big|_{z=\sqrt{2}}^{1} \right) \\
&= 2\pi \left(2-\sqrt{2}+\frac{1}{2}-1 \right) \\
&= \pi\left(3-2\sqrt{2}\right).
\end{aligned}$$

Folha de Rascunho