P1 de Cálculo a Várias Variáveis I
MAT 1162 — 2013.1
Data: 09 de abril de 2013

Nome: ____ Matrícula: ____________
Assinatura: ____ Turma: ____________

Questão	Valor	Nota	Revisão
1	3.0		
2	2.0		
3	3.0		
Teste	2.0		
Total	10.0		

Instruções

- Mantenha seu celular desligado durante toda a prova.
- Não é permitido usar nenhum tipo de calculadora ou dispositivo eletrônico.
- Não destaque as folhas da prova.
- A prova pode ser resolvida a lápis, caneta azul ou caneta preta. Não é permitido usar caneta vermelha ou verde.
- Você não tem o direito de consultar anotações.
- Desenvolva a solução de cada questão, de maneira clara e objetiva, na folha em que a mesma está enunciada. Utilize o verso da folha se necessário.
- <u>RESPOSTAS SEM JUSTIFICATIVAS NÃO SERÃO CONSIDERADAS</u>.

1. Considere a região espacial

$$U = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; -4 + \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} \leq z \leq 4 - \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} \right\}.$$

(a) **(0.5)** Identifique a fronteira da região plana

$$R = U \cap \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; z = 0 \right\}$$

como uma cônica clássica, ou seja, determine sua equação e seu nome.

(b) **(1.0)** Escreva a fronteira de U como uma união de superfícies $S_1 \cup S_2$, determinando cada uma delas através de desigualdades ou igualdades. Esboce a fronteira de U.

(c) **(1.0)** Calcule o volume do sólido V, onde

$$V = U \cap \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; 0 \leq x \leq 3 \;,\; 0 \leq y \leq 2 \right\}.$$

(d) **(0.5)** Descreva, através de desigualdades ou igualdades, a parte da fronteira de V que está contida no plano $x = 3$.

Solução:

(a) Como os dois paraboloides são simétricos com relação ao plano $z = 0$, a interseção de U com este plano acontece ao longo da elipse de semi-eixos $a = 3$ e $b = 4$, a qual possui a seguinte equação:

$$0 = 4 - \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 4$$

(b) A fronteira do sólido U é composta por duas superfícies simétricas (um paraboloide como tampa de baixo e outro paraboloide como tampa de cima). A projeção ortogonal de U no plano xy é a elipse cheia cuja fronteira foi dada no item anterior. Assim,

Tampa de cima:

$$S_1 = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; z = 4 - \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} \;,\; \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} \leq 4 \right\}.$$

Tampa de baixo:

$$S_2 = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; z = -4 + \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} \;,\; \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} \leq 4 \right\}.$$

(c) Como a projeção ortogonal do sólido V sobre o plano xy é o retângulo $[0,3] \times [0,2]$, usaremos as coordenadas cartesianas para escrever seu volume:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Vol}(V) &= \int_0^2\int_0^3 \left(4 - \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16}\right) - \left(-4 + \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16}\right) dxdy \\
&= 2\int_0^2\int_0^3 4 - \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16}\, dxdy \\
&= 2\int_0^2 \left(4x - \frac{x^3}{27} - \frac{xy^2}{16}\right)\Bigg|_{x=0}^{3} dy \\
&= 2\int_0^2 11 - \frac{3y^2}{16}\, dy \\
&= 2\left(11y - \frac{y^3}{16}\right)\Bigg|_{y=0}^{2} \\
&= 43\ .
\end{aligned}
$$

(d) A parte da fronteira de V que está no plano $x = 3$ é

$$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ \middle|\ x = 3\ ,\ 0 \leq y \leq 2\ ,\ -3 + \frac{y^2}{16} \leq z \leq 3 - \frac{y^2}{16}\right\}.$$

2. Seja
$$R = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ \middle|\ 0 \leq x \leq y \leq 1\right\}.$$

(a) **(0.5)** Seja $F(x,y)$ uma função contínua definida na região R. Escreva a integral dupla
$$I = \iint_R F(x,y)\, dxdy$$
obrigatoriamente na forma de uma integral iterada, integrando primeiro com respeito a x e em seguida com respeito a y.

(b) **(0.5)** Escreva a integral dupla do item (a) obrigatoriamente como uma integral iterada, integrando primeiro com respeito a y e em seguida com respeito a x.

Obs.: Obviamente, nos itens (a) e (b) não é pedido cálculo de integral.

(c) **(1.0)** Calcule
$$I = \iint_R e^{y^2}\, dxdy\,.$$

Solução:

(a) Como
$$R = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ \Big| \ 0 \le y \le 1 \ , \ 0 \le x \le y\Big\} \ ,$$
temos que
$$I = \iint_R F(x,y)\,dxdy = \int_0^1 \int_0^y F(x,y)\,dxdy\,.$$

(b) Como
$$R = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ \Big| \ 0 \le x \le 1 \ , \ x \le y \le 1\Big\} \ ,$$
temos que
$$I = \iint_R F(x,y)\,dxdy = \int_0^1 \int_x^1 F(x,y)\,dydx\,.$$

(c) Utilizando a descrição do item (a), podemos escrever:
$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \int_0^y e^{y^2}\,dxdy \\ &= \int_0^1 \left(x\,e^{y^2}\right)\Big|_{x=0}^{y}\,dy \\ &= \int_0^1 ye^{y^2}dy \\ &= \frac{e^{y^2}}{2}\Bigg|_{y=0}^{1} \\ &= \frac{e-1}{2}\,. \end{aligned}$$

3. Seja $R = D \cap H$, onde D é o disco fechado de raio 2 centrado no ponto $(0,2)$ e H é o semiplano fechado $x \ge 0$.
   (a) **(1.0)** Esboce a região plana R e determine-a através de desigualdades em coordenadas polares r e θ.
   (b) **(1.0)** Usando coordenadas polares, escreva a integral dupla
$$I = \iint_R y\,dxdy$$

na forma

$$\int_a^b f(\theta)\,d\theta\,,$$

explicitando as constantes a e b e a função $f(\theta)$.

Obs.: Neste item <u>não</u> é pedido o cálculo da integral $\int_a^b f(\theta)\,d\theta$.

(c) **(1.0)** Escreva o volume do sólido U em função de I (sendo I a integral do item anterior), onde

$$U=\Big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \;\Big|\; 0\le z\le y+1\;\;,\;(x,y)\in R\Big\}\;.$$

Solução:

(a) Em coordenadas polares, o círculo de centro $(0,2)$ e raio 2 tem a seguinte equação:

$$\begin{aligned}
& x^2+(y-2)^2=4\\
\Rightarrow\;& r^2\cos^2(\theta)+(r\,\mathrm{sen}(\theta)-2)^2=4\\
\Rightarrow\;& r^2\cos^2(\theta)+r^2\mathrm{sen}^2(\theta)-4r\,\mathrm{sen}(\theta)+4=4\\
\Rightarrow\;& r^2-4r\,\mathrm{sen}(\theta)=0\\
\Rightarrow\;& r=4\,\mathrm{sen}(\theta)
\end{aligned}$$

Podemos então descrever a região plana R como:

$$R=\left\{(r,\theta)\;\middle|\;0\le r\le 4\,\mathrm{sen}(\theta)\;\;,\;0\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right\}\;.$$

(b) Utilizando a descrição do item (a), podemos escrever:

$$\begin{aligned}
I &= \iint_R y\,dxdy\\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{4\,sen(\theta)} r^2\mathrm{sen}(\theta)\,drd\theta\\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{r^3}{3}\mathrm{sen}(\theta)\right)\Bigg|_{r=0}^{4\,sen(\theta)} d\theta\\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{64\,\mathrm{sen}^4(\theta)}{3}\,d\theta\,.
\end{aligned}$$

Logo,

$$a=0\,,\quad b=\frac{\pi}{2}\,,\quad f(\theta)=\frac{64\,\mathrm{sen}^4(\theta)}{3}\;.$$

(c) O volume do sólido U é dado por

$$\begin{aligned}
\mathrm{Vol}(U) &= \iint_R (y + 1 - 0)\, dxdy \\
&= \iint_R y\, dxdy + \iint_R 1\, dxdy \\
&= I + A(R)\,,
\end{aligned}$$

onde I é a integral calculada no item (c) e $A(R)$ é a área da região R (ou seja, metade da área de um disco de raio 2). Assim,

$$\mathrm{Vol}(U) = I + A(R) = I + 2\pi\,.$$