P2 de Cálculo a Várias Variáveis I

MAT 1162 — 2013.1

Data: 22 de junho de 2013

Nome: ______________________________ Matrícula: __________

Assinatura: ____________________________ Turma: __________

Questão	Valor	Nota	Revisão
1	5.0		
2	3.0		
Teste	2.0		
Total	10.0		

Instruções

- Mantenha seu celular desligado durante toda a prova.
- Não é permitido usar nenhum tipo de calculadora ou dispositivo eletrônico.
- Não destaque as folhas da prova.
- A prova pode ser resolvida a lápis, caneta azul ou caneta preta. Não é permitido usar caneta vermelha ou verde.
- Você não tem o direito de consultar anotações.
- RESPOSTAS SEM JUSTIFICATIVAS NÃO SERÃO CONSIDERADAS.

1. Considere (em todos os itens desta questão) a função

$$f(x, y, z) = x^2 + 2xy + 2yz + z^2 + 10$$

e a superfície de nível

$$S = \Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ \Big| \ f(x, y, z) = 11\Big\} .$$

(a) **(1.5)** Classifique os pontos críticos da função $f(x, y, z)$, determinando se são máximos locais, mínimos locais ou pontos de sela.

(b) **(1.0)** Escreva a aproximação quadrática $Q(x, y, z)$ da função $f(x, y, z)$ no ponto $(0, 0, 0)$.

(c) **(1.5)** Determine se S é um elipsoide, ou um paraboloide hiperbólico (sela), ou um hiperboloide de uma folha ou um hiperboloide de duas folhas, justificando sua resposta.

Dica: Para este item, leve em conta que a matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

tem autovalores 1, 2 e -1.

(d) **(1.0)** Determine um vetor não nulo $v = (a, b, c)$ de maneira que todo plano π ortogonal a v corta S ao longo de elipses, isto é

$$\pi \cap S \quad \text{é uma elipse} .$$

Solução:

(a) Os pontos críticos de f são aqueles que satisfazem o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} f_x = 2x + 2y = 0 \\ f_y = 2x + 2z = 0 \\ f_z = 2y + 2z = 0 \end{cases}$$

Subtraindo a segunda equação da primeira, temos que $y - z = 0$, logo $y = z$. Substituindo este resultado na terceira equação, conclui-se que $z = 0$. Logo, $y = 0$. Da primeira equação segue que $x = 0$.

Assim, o único ponto crítico de $f(x, y, z)$ é $(0, 0, 0)$. Para classificá-lo, devemos encontrar os autovalores da matriz hessiana de f em $(0, 0, 0)$.

Como

$$\begin{aligned} f_{xx} &= 2 \\ f_{yy} &= 0 \\ f_{zz} &= 2 \\ f_{xy} &= f_{yx} = 2 \\ f_{xz} &= f_{zx} = 0 \\ f_{yz} &= f_{zy} = 2 \end{aligned}$$

segue que

$$H(f)(0,0,0) = A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Os autovalores de A são as raízes de seu polinômio característico $p(\lambda)$:

$$\begin{aligned} p(\lambda) = \det(\lambda I - A) = 0 \ &\Leftrightarrow \ \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -2 & 0 \\ -2 & \lambda & -2 \\ 0 & -2 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = 0 \\ &\Leftrightarrow \ \lambda(\lambda-2)^2 - 8(\lambda - 2) = 0 \\ &\Leftrightarrow \ (\lambda - 2)(\lambda^2 - 2\lambda - 8) = 0 \\ &\Leftrightarrow \ (\lambda-2)(\lambda+2)(\lambda-4) = 0 \end{aligned}$$

Logo, os autovalores de A são -2, 2, 4, e então $(0,0,0)$ é um ponto de sela.

(b) A aproximação quadrática de f no ponto $(0,0,0)$ é dada por

$$\begin{aligned} Q(x,y,z) &= f(0,0,0) + \nabla f(0,0,0) \cdot (x,y,z) \\ &+ \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} H(f)(0,0,0) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Como $(0,0,0)$ é ponto crítico de f, temos que $\nabla f(0,0,0) = (0,0,0)$. Logo,

$$\begin{aligned} Q(x,y,z) &= 10 + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ &= 10 + \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ &= x^2 + 2xy + 2yz + z^2 + 10 \\ &= f(x,y,z). \end{aligned}$$

(Este resultado não é uma surpresa: como a própria f tem expressão quadrática nas variáveis x, y e z, é natural que sua aproximação quadrática seja ela mesma).

(c) Observe que

$$\begin{aligned} f(x,y,z)=11 \quad &\Leftrightarrow \quad x^2+2xy+2yz+z^2=1 \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 1\,. \end{aligned}$$

Seja

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

De acordo com a dica do enunciado, os autovalores de M são 1, 2 e -1.

Para $\lambda_1 = 1$, o autovetor v_1 associado a ele deve satisfazer o seguinte:

$$\begin{aligned} Mv_1 = \lambda_1 v_1 \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x+y=x \\ x+z=y \\ y+z=z \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} y=0 \\ x=-z \end{cases} \end{aligned}$$

Ou seja, v_1 deve ser um múltiplo do vetor $(1,0,-1)$. Vamos tomá-lo então com norma 1:

$$v_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Para $\lambda_2 = 2$, o autovetor v_2 associado a ele deve satisfazer o seguinte:

$$\begin{aligned}
Mv_2 = \lambda_2 v_2 \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x + y = 2x \\ x + z = 2y \\ y + z = 2z \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = y \\ x + z = 2y \\ y = z \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad x = y = z
\end{aligned}$$

Ou seja, v_2 deve ser um múltiplo do vetor $(1, 1, 1)$. Vamos tomá-lo então com norma 1:

$$v_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right) .$$

Para $\lambda_3 = -1$, o autovetor v_3 associado a ele deve satisfazer o seguinte:

$$\begin{aligned}
Mv_3 = \lambda_3 v_3 \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x + y = -x \\ x + z = -y \\ y + z = -z \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2x + y = 0 \\ x + y + z = 0 \\ y + 2z = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

Da primeira e terceira equações segue que $x = z$. Substituindo este resultado na segunda equação, temos que $2x + y = 0 \Rightarrow y = -2x$. Ou seja, v_3 deve ser um múltiplo do vetor $(1, -2, 1)$. Vamos tomá-lo então com norma 1:

$$v_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}} \right) .$$

(Poderíamos ter obtido as coordenadas de v_3 de outra maneira: como M é uma matriz simétrica, possui base ortogonal de autovetores. Logo, $v_3 = v_1 \times v_2$).

Podemos agora construir P, a matriz ortogonal que tem como colunas os autovetores unitários de M:

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} .$$

Aplicando então a mudança de variáveis

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} ,$$

temos que

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 1 \\ \Leftrightarrow \quad & \begin{pmatrix} x' & y' & z' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = 1 \\ \Leftrightarrow \quad & x'^2 + 2y'^2 - z'^2 = 1 \,. \end{aligned}$$

Ou seja, a superfície S é um hiperboloide de uma folha rotacionado (os eixos x', y' e z' são dados pelos vetores v_1, v_2 e v_3, respectivamente).

(d) Observe que se interceptarmos a superfície S por planos da forma $z' = c$ (onde c é uma constante), obteremos elipses:

$$x'^2 + 2y'^2 = 1 + c^2$$

$$\Rightarrow \frac{x'^2}{1+c^2} + \frac{y'^2}{\frac{1+c^2}{2}} = 1$$

(elipse de semi-eixos $\sqrt{1+c^2}$ e $\sqrt{\frac{1+c^2}{2}}$ no plano $x'y'$).

Ou seja, todo plano ortogonal ao eixo z' corta S ao longo de elipses. Logo, podemos tomar

$$v = v_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}} \right) .$$

2. Seja U a região do espaço definida por

$$U = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ \middle| \ z^2 \geq x^2+y^2 \ , \ x^2+y^2+z^2 \leq 2 \ , \ z \geq 0\right\} .$$

Considere a função

$$f(x,y,z) = z^2(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{3}}$$

e a integral tripla

$$I = \iiint_U f(x,y,z)\, dxdydz.$$

(a) **(1.0)** Escreva I na forma de uma integral iterada, usando obrigatoriamente coordenadas cilíndricas (r,θ,z). (*Neste item não é pedido o cálculo da integral.*)

(b) **(1.0)** Escreva I na forma de uma integral iterada, usando obrigatoriamente coordenadas esféricas (ρ,φ,θ). (*Neste item não é pedido o cálculo da integral.*)

(c) **(1.0)** Calcule I (usando o método que preferir).

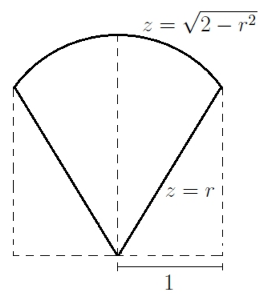
Solução:

(a) A projeção no plano xy da interseção entre o cone $z^2 = x^2+y^2$ e a esfera $x^2+y^2+z^2 = 2$ é dada por:

$$x^2+y^2+(x^2+y^2) = 2 \Rightarrow x^2+y^2 = 1\,,$$

ou seja, é um círculo de centro na origem e raio 1.

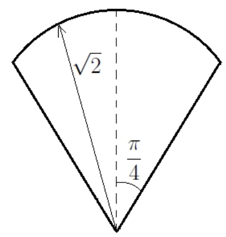
Além disso, as equações da folha superior do cone ($z = \sqrt{x^2+y^2}$) e da calota superior da esfera ($z = \sqrt{2-x^2-y^2}$) em coordenadas cilíndricas são $z = r$ e $z = \sqrt{2-r^2}$, respectivamente. O seguinte esboço representa um corte da região espacial U por um plano vertical, e resume as informações obtidas até agora:



Como $f(r\,cos(\theta), r\,sen(\theta), z) = z^2(r^2+z^2)^{\frac{1}{3}}$ e o elemento de volume para as coordenadas cilíndricas é $r\ dr\,d\theta\,dz$, podemos escrever:

$$I \ = \ \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_r^{\sqrt{2-r^2}} z^2(r^2+z^2)^{\frac{1}{3}} r\ dzdrd\theta.$$

(b) Para definir os limites de integração em coordenadas esféricas, observamos o seguinte desenho (corte da região espacial por um plano vertical):



Como $f(\rho\,\mathrm{sen}\phi\cos\theta, \rho\,\mathrm{sen}\phi\,\mathrm{sen}\theta, \rho\cos\phi) = \rho^2\cos^2\phi\;\rho^{\frac{2}{3}}$ e o elemento de volume para as coordenadas esféricas é $\rho^2\,\mathrm{sen}\phi\; d\rho\, d\phi\, d\theta$, podemos escrever:

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{\sqrt{2}} \rho^2\cos^2\phi\;\rho^{\frac{2}{3}}\rho^2\,\mathrm{sen}\phi\; d\rho d\phi d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{\sqrt{2}} \rho^{\frac{14}{3}}\cos^2\phi\;\;\mathrm{sen}\phi\; d\rho d\phi d\theta
\end{aligned}
$$

(c) Utilizando as coordenadas esféricas, temos que:

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{\sqrt{2}} \rho^{\frac{14}{3}}\cos^2\phi\;\;\mathrm{sen}\phi\; d\rho d\phi d\theta \\
&= 2\pi\left(\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2\phi\;\;\mathrm{sen}\phi\; d\phi\right)\left(\int_0^{\sqrt{2}}\rho^{\frac{14}{3}}\;d\rho\right) \\
&= 2\pi\left(-\frac{\cos^3\phi}{3}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}\right)\left(\frac{3\rho^{\frac{17}{3}}}{17}\Big|_0^{\sqrt{2}}\right) \\
&= \frac{2\pi}{3}\left(\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3+1\right)\left(\frac{3}{17}\left(\sqrt{2}^{\frac{17}{3}}\right)\right) \\
&= \frac{\pi}{17}\left(1-\frac{1}{2^{\frac{3}{2}}}\right)2^{\frac{23}{6}} \\
&= \frac{\pi}{17}\left(8\sqrt[6]{2^5}-4\sqrt[3]{2}\right)\;.
\end{aligned}
$$