P2 de Cálculo a Várias Variáveis I

MAT 1162 — 2013.1

Data: 14 de maio de 2013

Nome: __________________________________ Matrícula: ____________
Assinatura: ______________________________ Turma: ____________

Questão	Valor	Nota	Revisão
1	3.0		
2	5.0		
Teste	2.0		
Total	10.0		

Instruções

- Mantenha seu celular desligado durante toda a prova.
- Não é permitido usar nenhum tipo de calculadora ou dispositivo eletrônico.
- Não destaque as folhas da prova.
- A prova pode ser resolvida a lápis, caneta azul ou caneta preta. Não é permitido usar caneta vermelha ou verde.
- Você não tem o direito de consultar anotações.
- <u>RESPOSTAS SEM JUSTIFICATIVAS NÃO SERÃO CONSIDERADAS</u>.

1. Considere a função

$$f(x,y) = (x^2-1)(y^2-1)\,, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2\,.$$

(a) **(1.0)** Encontre os pontos (x,y,z) do gráfico de f onde o plano tangente é horizontal, isto é, de equação cartesiana $z = c$ (c constante).

(b) **(0.5)** Encontre todos os pontos críticos de f.

(c) **(1.0)** Sejam $x(u,v)$, $y(u,v)$ funções diferenciáveis satisfazendo:

$$\begin{aligned} x(0,0) &= 0 \quad , \quad & y(0,0) &= \sqrt{2} \\ x_u(0,0) &= 1 \quad , \quad & y_u(0,0) &= \sqrt{2} \\ x_v(0,0) &= \sqrt{2} \quad , \quad & y_v(0,0) &= 3 \end{aligned}$$

Considere a função composta

$$g(u,v) = f\left(x(u,v), y(u,v)\right)\,.$$

Calcule o gradiente de g no ponto $(u,v) = (0,0)$.

(d) **(0.5)** Considere a seguinte curva de nível:

$$C = \left\{ (u,v) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; g(u,v) = -1 \right\}\,.$$

Escreva a equação paramétrica da reta normal à curva C no ponto $(u,v) = (0,0)$.

Solução:

(a) O plano tangente é horizontal quando seu vetor normal é paralelo ao eixo z, ou seja, paralelo ao vetor $(0,0,1)$. Logo, devemos resolver o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} f_x = 2x(y^2-1) = 0 \\ f_y = 2y(x^2-1) = 0 \end{cases}$$

Da primeira equação, segue que $x = 0$ ou $y = 1$ ou $y = -1$.

- Se $x = 0$, segue pela segunda equação que $y = 0$.
- Se $y = 1$, segue pela segunda equação que $x = 1$ ou $x = -1$.
- Se $y = -1$, segue pela segunda equação que $x = 1$ ou $x = -1$.

Assim, os pontos do gráfico de f onde o plano tangente é horizontal são

$$\begin{array}{l}(0,0,f(0,0)) = (0,0,1)\\ (1,1,f(1,1)) = (1,1,0)\\ (-1,1,f(-1,1)) = (-1,1,0)\\ (1,-1,f(1,-1)) = (1,-1,0)\\ (-1,-1,f(-1,-1)) = (-1,-1,0)\,.\end{array}$$

(b) Os pontos críticos de f são aqueles em que $f_x(x,y) = 0$ e $f_y(x,y) = 0$, sistema este que já foi resolvido no item anterior. Logo, os pontos críticos são $(0,0)$, $(1,1)$, $(-1,1)$, $(1,-1)$, $(-1,-1)$.

(c) Temos que

$$\nabla g(0,0) = \big(g_u(0,0), g_v(0,0)\big)\ .$$

Segue pela Regra da Cadeia que

$$\begin{array}{rcl} g_u(0,0) & = & f_x(0,\sqrt{2})\,.\,x_u(0,0) + f_y(0,\sqrt{2})\,.\,y_u(0,0)\\ & = & 0\,.\,1 - 2\sqrt{2}\,.\,\sqrt{2}\\ & = & -4 \end{array}$$

e

$$\begin{array}{rcl} g_v(0,0) & = & f_x(0,\sqrt{2})\,.\,x_v(0,0) + f_y(0,\sqrt{2})\,.\,y_v(0,0)\\ & = & 0\,.\,\sqrt{2} - 2\sqrt{2}\,.\,3\\ & = & -6\sqrt{2}\,. \end{array}$$

Logo,

$$\nabla g(0,0) = \Big(-4, -6\sqrt{2}\Big)\ .$$

(d) A reta normal passa pelo ponto $(0,0)$ e tem como vetor diretor o vetor gradiente calculado no item (c). Logo, podemos parametrizá-la por

$$\alpha(t) = (0,0) + t(-4,-6\sqrt{2}) = (-4t, -6\sqrt{2}t)\,,\ \ t \in \mathbb{R}\,.$$

2. **(a)** Considere a curva plana parametrizada

$$\alpha(t) = \left(t^2, t^3 - t\right)\ ,\ \ t \in \mathbb{R}\,.$$

(i) **(1.0)** Determine todos os pontos da curva plana nos quais a reta tangente é horizontal ou vertical.

(ii) **(1.0)** Determine se o traço da curva plana é simétrico com respeito ao eixo x ou ao eixo y.

(iii) **(1.0)** Encontre funções $f_1 : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ e $f_2 : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ tais que a união de seus gráficos seja o traço da curva plana dada.

(iv) **(1.0)** Com o auxílio das informações obtidas nos itens (i), (ii) e (iii), esboce o traço da curva plana, justificando corretamente o desenho da curva obtido. Identifique em seu desenho a orientação da curva, esboçando o vetor velocidade em três pontos distintos.

(b) **(1.0)** Considere a curva espacial parametrizada

$$\beta(t) = \left(t^2, t^3 - t, (t^3 - t)^2 - t^4\right)\ ,\ \ t \in \mathbb{R}\,.$$

Encontre um ponto da curva espacial tal que a reta tangente neste ponto seja paralela ao plano xy. Dê a equação cartesiana do plano ortogonal à curva espacial neste ponto.

Solução:

(a) **(i)** O vetor diretor da reta tangente é

$$\alpha'(t) = (2t, 3t^2 - 1)\,.$$

A reta tangente é horizontal quando seu vetor diretor é paralelo ao eixo x, ou seja, quando

$$\begin{aligned} & 3t^2 - 1 = 0 \\ \Rightarrow\quad & t = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}\,. \end{aligned}$$

Logo, os pontos da curva onde a reta tangente é horizontal são

$$\alpha\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3\sqrt{3}}\right)\ ,$$
$$\alpha\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3\sqrt{3}}\right)\ .$$

Analogamente, a reta tangente é vertical quando seu vetor diretor é paralelo ao eixo y. Ou seja, quando

$$2t = 0 \Rightarrow t = 0\,.$$

Logo, o único ponto da curva onde a reta tangente é vertical é

$$\alpha(0) = (0,0)\,.$$

(ii) Observe que

$$\alpha(-t) = \big((-t)^2, (-t)^3 - (-t)\big) = (t^2, -t^3 + t)\,.$$

Logo, a curva é simétrica com relação ao eixo x.

(iii) Temos que

$$x = t^2\ , \quad y = t^3 - t\,.$$

- Se $t \geq 0$, segue da primeira equação que $t = \sqrt{x}$ e, pela segunda equação, $y = x^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{1}{2}}$.
- Se $t \leq 0$, segue da primeira equação que $t = -\sqrt{x}$ e, pela segunda equação, $y = -x^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{1}{2}}$.

Logo, podemos definir

$$\begin{array}{rcl} f_1(x) & = & x^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{1}{2}} \;=\; x^{\frac{1}{2}}(x-1) \\ f_2(x) & = & -x^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{1}{2}} \;=\; -x^{\frac{1}{2}}(x-1)\,. \end{array}$$

Vamos descrever outra maneira de chegar ao mesmo resultado. Como

$$y = t^3 - t = t(t^2 - 1) = t(x-1)\,,$$

segue que

$$y = t(x-1) \;\Rightarrow\; t = \frac{y}{x-1}\,.$$

Substituindo este resultado na equação $x = t^2$, temos:

$$x = \frac{y^2}{(x-1)^2} \;\Rightarrow\; y^2 = x(x-1)^2 \;\Rightarrow\; y = \pm\sqrt{x}(x-1)\,.$$

E assim podemos definir novamente as funções f_1 e f_2:

$$\begin{array}{rcl} f_1(x) & = & \sqrt{x}(x-1) \;=\; x^{\frac{1}{2}}(x-1) \\ f_2(x) & = & -\sqrt{x}(x-1) \;=\; -x^{\frac{1}{2}}(x-1)\,. \end{array}$$

(iv) Cálculo de vetores velocidade em três pontos distintos:

$$\alpha'\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \left(-\frac{2}{\sqrt{3}}, 0\right),$$

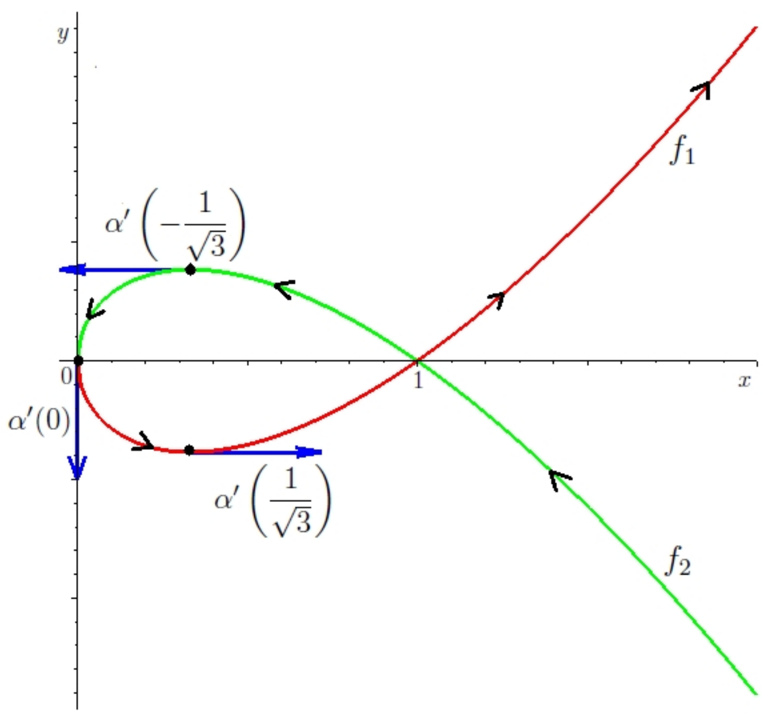
$$\alpha'(0) = (0, -1),$$

$$\alpha'\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}, 0\right).$$

Estudando o sinal da segunda coordenada dos vetores tangentes, $3t^2 - 1$, podemos analisar sua inclinação:

- Se $t \leq -\frac{1}{\sqrt{3}}$ ou $t \geq \frac{1}{\sqrt{3}}$, então $3t^2 - 1 \geq 0 \Rightarrow$ vetor velocidade aponta para cima.
- Se $-\frac{1}{\sqrt{3}} \leq t \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$, então $3t^2 - 1 \leq 0 \Rightarrow$ vetor velocidade aponta para baixo.

Com esta informação e aquelas obtidas nos itens anteriores, podemos esboçar o traço da curva e indicar sua orientação:



(b) A reta tangente é paralela ao plano xy quando seu vetor diretor $\beta'(t)$ é perpendicular ao eixo z, ou seja, ao vetor $(0,0,1)$:

$$\big(2t\,,\,3t^2-1\,,\,2(t^3-t)(3t^2-1)-4t^3\big)\;.\;(0,0,1)=0$$

$$\Leftrightarrow\;\; 2(t^3-t)(3t^2-1)-4t^3=0$$

Para $t=0$, por exemplo, a equação acima é satisfeita. Logo, um ponto onde a reta tangente é paralela ao plano xy é

$$\beta(0)=(0,0,0)\,.$$

O plano ortogonal à curva no ponto $(0,0,0)$ tem vetor normal $\beta'(0)=(0,-1,0)$. Sua equação cartesiana é então

$$0\,.\,(x-0)-1\,.\,(y-0)+0\,.\,(z-0)=0\;\Rightarrow\; y=0\,.$$