P4 de Cálculo a Várias Variáveis I
MAT 1162 — 2012.1
05 de julho de 2012

Nome: ______________________________________ Matrícula: ____________
Assinatura: __________________________________ Turma: ____________

Questão	Valor	Nota	Revisão
1	3.5		
2	3.5		
3	3.0		
Total	10.0		

Instruções

- Mantenha seu celular desligado durante toda a prova.
- Não é permitido usar nenhum tipo de calculadora ou dispositivo eletrônico.
- Não destaque as folhas da prova.
- A prova pode ser resolvida a lápis, caneta azul ou caneta preta. Não é permitido usar caneta vermelha ou verde.
- Você não tem o direito de consultar anotações.
- Desenvolva a solução de cada questão, de maneira clara e objetiva, na folha em que a mesma está enunciada. Utilize o verso da folha se necessário.
- <u>RESPOSTAS SEM JUSTIFICATIVAS NÃO SERÃO CONSIDERADAS</u>.

1. Sejam

$$U = \Big\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid e^{x^2+y^2+7} + 1 \leq z \leq 2x + 3y - 6 \, , \, x^2 + y^2 \leq 1 \Big\}$$

e

$$f(x,y,z) = xy\cos(z) + 2 \, .$$

(a) **(1.0)** Escreva a integral tripla

$$I = \iiint_U f(x,y,z) \; dx\,dy\,dz$$

na forma de uma integral iterada nas variáveis x, y, z, obrigatoriamente. (*Neste item não é pedido o cálculo da integral.*)

(b) **(1.0)** Escreva a integral tripla

$$I = \iiint_U f(x,y,z) \; dx\,dy\,dz$$

na forma de uma integral iterada nas variáveis r, θ, z, obrigatoriamente. (*Neste item não é pedido o cálculo da integral.*)

(c) **(1.5)** Calcule o volume de U.

Solução:

(a)

$$\begin{aligned} I &= \iiint_U \big(xy\cos(z) + 2 \big) \; dx\,dy\,dz \\ &= \int_{x=-1}^{1} \int_{y=-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{z=2x+3y-6}^{e^{x^2+y^2+7}+1} \big(xy\cos(z) + 2 \big) \; dz\,dy\,dx \; . \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} I &= \iiint_U \big(xy\cos(z) + 2 \big) \; dx\,dy\,dz \\ &= \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{1} \int_{z=2r\,cos(\theta)+3r\,sen(\theta)-6}^{e^{r^2+7}+1} \big(r^2\cos(\theta)\,\mathrm{sen}(\theta)\cos(z) + 2 \big) \; dz \; r\,dr\,d\theta \; . \end{aligned}$$

(c)

$$\mathrm{Vol}(U) = \iiint_U \, dx\, dy\, dz$$

$$= \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{1} \int_{z=2r\,cos(\theta)+3r\,sen(\theta)-6}^{e^{r^2+7}+1} \, dz \;\, r\, dr\, d\theta$$

$$= \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{1} \left[\left(e^{r^2+7}+1 \right) - \big(2r\,cos(\theta) + 3r\,sen(\theta) - 6 \big) \right] \; r\, dr\, d\theta$$

$$= \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{1} \left(re^{r^2+7} + 7r \right) dr d\theta - \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{1} \big(2r^2 cos(\theta) + 3r^2 sen(\theta) - 6 \big) \, dr d\theta$$

$$= 2\pi \left[\int_{r=0}^{1} (re^{r^2+7} + 7r) dr \right] - \left[\int_{\theta=0}^{2\pi} cos(\theta) d\theta \int_{r=0}^{1} 2r^2 \, dr + \int_{\theta=0}^{2\pi} sen(\theta) d\theta \int_{r=0}^{1} 3r^2 \, dr \right]$$

$$= \pi \left[\int_{r=0}^{1} 2re^{r^2+7} dr + 7 \int_{r=0}^{1} 2r \, dr \right] - \left[0\,.\int_{r=0}^{1} 2r^2 \, dr + 0\,.\int_{r=0}^{1} 3r^2 \, dr \right]$$

$$= \pi(e^8 - e^7) + 7\pi \;.$$

2. Seja

$$W = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; 1 \leq x^2+y^2+z^2 \leq 4\,,\; z^2 \geq x^2+y^2\,,\; z \geq 0 \right\}\,.$$

(a) **(0.5)** Faça um esboço da região W.

(b) **(1.0)** Escreva a integral tripla

$$I = \iiint_W z \; dx\,dy\,dz$$

na forma de uma soma de integrais iteradas nas variáveis r, θ, z, obrigatoriamente. (*Neste item não é pedido o cálculo da integral.*)

(c) **(1.0)** Escreva a integral tripla

$$I = \iiint_W z \; dx\,dy\,dz$$

na forma de uma integral iterada, usando obrigatoriamente as coordenadas esféricas ρ, φ, θ. (*Neste item não é pedido o cálculo da integral.*)

(d) **(1.0)** Calcule

$$I = \iiint_W z \; dx\,dy\,dz\,.$$

Solução:

(a) Esboço.

(b) O esboço abaixo representa uma seção transversal da região espacial W:

Inserir FIGURA.

Logo, temos que:

$$\begin{aligned} I &= \iiint_W z \; dx\,dy\,dz \\ &= \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\int_{z=\sqrt{1-r^2}}^{\sqrt{4-r^2}} z\,dz\;r\,dr\,d\theta + \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\sqrt{2}}\int_{z=r}^{\sqrt{4-r^2}} z\,dz\;r\,dr\,d\theta\;. \end{aligned}$$

(c) Utilizando coordenadas esféricas, a seção transversal do item (B) agora pode ser descrita como:

Inserir FIGURA.

Logo,

$$\begin{aligned} I &= \iiint_W z \; dx\,dy\,dz \\ &= \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{4}}\int_{\rho=1}^{2} \rho\cos(\varphi)\,d\rho\;\rho^2\mathrm{sen}(\varphi)\,d\varphi\,d\theta\;. \end{aligned}$$

(d) Utilizando o item (C), temos que

$$\begin{aligned}
I &= \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{4}}\int_{\rho=1}^{2} \rho\cos(\varphi)\,d\rho\;\rho^2\mathrm{sen}(\varphi)\,d\varphi\,d\theta \\
&= 2\pi\int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{4}}\int_{\rho=1}^{2}\rho^3\,d\rho\;\cos(\varphi)\mathrm{sen}(\varphi)\,d\varphi \\
&= 2\pi\left(\frac{2^4-1}{4}\right)\int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{4}}\cos(\varphi)\mathrm{sen}(\varphi)\,d\varphi \\
&= \frac{15\pi}{2}\cdot\frac{\mathrm{sen}^2(\varphi)}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} \\
&= \frac{15\pi}{4}\cdot\frac{1}{2} \\
&= \frac{15\pi}{8}\;.
\end{aligned}$$

3. Seja $f(x,y)$ uma função diferenciável em todo o plano. Defina

$$g(r,\theta) = f(r\cos(\theta), r\,\mathrm{sen}(\theta))\,,$$

onde $r > 0$ e $\pi < \theta < \pi$.

(a) **(1.0)** Calcule

$$r^2 g_r^2 + g_\theta^2$$

em termos de r, f_x e f_y.

(b) **(1.0)** Encontre constantes a, b tal que

$$f_x^2 + f_y^2 = g_r^2 + \frac{3a}{r^2+b} g_\theta^2\ .$$

(c) **(1.0)** Assuma que $f(x,y)$ é duas vezes diferenciável com continuidade e que $g_{rr}\left(1,\frac{\pi}{2}\right) = 3$, $g_{\theta\theta}\left(1,\frac{\pi}{2}\right) = 2$, $g_{r\theta}\left(1,\frac{\pi}{2}\right) = 1$. Calcule $f_{yy}(0,1)$.

(*Atenção: No item (c), as derivadas parciais da função $g(r,\theta)$ foram calculadas em $(r,\theta) = \left(1,\frac{\pi}{2}\right)$. Já a derivada parcial da função $f(x,y)$ foi calculada em $(x,y) = \big(r\ cos(\theta), r\ sen(\theta)\big) = (0,1)$*).

Solução:

(a) Pela definição de $g(r,\theta)$, temos que:

$$g_r = f_x\cos(\theta) + f_y\mathrm{sen}(\theta)\ ,$$

$$g_\theta = -f_x r\mathrm{sen}(\theta) + f_y r\cos(\theta)\ ,$$

$$g_r^2 = f_x^2\cos^2(\theta) + f_y^2\mathrm{sen}^2(\theta) + 2f_xf_y\cos(\theta)\mathrm{sen}(\theta)\ ,$$

$$g_\theta^2 = f_x^2r^2\mathrm{sen}^2(\theta) + f_y^2r^2\cos^2(\theta) - 2f_xf_yr^2\cos(\theta)\mathrm{sen}(\theta)\ .$$

Logo,

$$r^2g_r^2 + g_\theta^2 = r^2f_x^2 + r^2f_y^2\ .$$

(b) Pelo item anterior,

$$r^2g_r^2 + g_\theta^2 = r^2f_x^2 + r^2f_y^2$$

$$\Rightarrow\quad f_x^2 + f_y^2 = g_r^2 + \frac{1}{r^2}g_\theta^2\,.$$

E então concluímos que $a = \frac{1}{3}$ e $b = 0$.

(c) Assumindo que $f(x,y)$ é duas vezes diferenciável com continuidade, temos que

$$\begin{aligned} g_{rr} &= \big(f_{xx}\cos(\theta) + f_{xy}\mathrm{sen}(\theta)\big)\cos(\theta) + \big(f_{yx}\cos(\theta) + f_{yy}\mathrm{sen}(\theta)\big)\,\mathrm{sen}(\theta) \\ &= f_{xx}\cos^2(\theta) + 2f_{xy}\mathrm{sen}(\theta)\cos(\theta) + f_{yy}\mathrm{sen}^2(\theta)\,, \end{aligned}$$

onde g_{rr} está calculada em (r,θ) e f_{xx}, f_{xy} e f_{yy} estão calculadas em $(x,y) = \big(r\cos(\theta), r\,\mathrm{sen}(\theta)\big)$.

Substituindo $r=1$, $\theta = \frac{\pi}{2}$, obtemos então

$$g_{rr}\left(1, \frac{\pi}{2}\right) = f_{yy}(0,1)\,.$$

Logo,

$$f_{yy}(0,1) = 3\,.$$