P1 de Cálculo a Várias Variáveis I
MAT 1162 — 2012.1
Data: 13 de abril de 2012

Nome: ______________________________ Matrícula: ____________
Assinatura: ____________________________ Turma: ____________

Questão	Valor	Nota	Revisão
1	3.0		
2	4.0		
3	2.0		
Teste	1.0		
Total	10.0		

Instruções

- Mantenha seu celular desligado durante toda a prova.
- Não é permitido usar nenhum tipo de calculadora ou dispositivo eletrônico.
- Não destaque as folhas da prova.
- A prova pode ser resolvida a lápis, caneta azul ou caneta preta. Não é permitido usar caneta vermelha ou verde.
- Você não tem o direito de consultar anotações.
- Desenvolva a solução de cada questão, de maneira clara e objetiva, na folha em que a mesma está enunciada. Utilize o verso da folha se necessário.
- RESPOSTAS SEM JUSTIFICATIVAS NÃO SERÃO CONSIDERADAS.

1. Considere a região U de $\mathbb{R}^3$ dada por

$$U = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\; \middle| \;\; -1 \leq z \leq x^2 - y^2 + 10 \;,\; x^2 + y^2 \leq 1 \right\} .$$

   (a) **(1.0)** Escreva o volume de U usando obrigatoriamente integrais iteradas nas variáveis cartesianas x e y. (*Neste item não é pedido o cálculo do volume.*)

   (b) **(1.0)** Escreva o volume de U usando obrigatoriamente coordenadas polares r e θ. (*Neste item não é pedido o cálculo do volume.*)

   (c) **(1.0)** Calcule o volume de U.

Solução:

(a) A projeção ortogonal de U sobre o plano xy é o disco centrado na origem de raio 1. Através de desigualdades, podemos descrevê-la da seguinte forma:

$$R = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\; \middle| \;\; -1 \leq x \leq 1 \;,\; -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2} \right\} .$$

Logo,

$$\begin{aligned} \mathrm{Vol}(U) &= \iint_R \big((x^2 - y^2 + 10) - (-1) \big) \, dxdy \\ &= \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \big(x^2 - y^2 + 11 \big) \, dydx \end{aligned}$$

(b) Em coordenadas polares, a região R é dada por $0 \leq r \leq 1$ e $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Usando ainda que $x = r\cos(\theta)$ e $y = r\mathrm{sen}(\theta)$, o volume de U pode ser reescrito como:

$$\mathrm{Vol}(U) = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \big(r^2\cos^2(\theta) - r^2\mathrm{sen}^2(\theta) + 11 \big) \, r \, drd\theta$$

(c) Utilizando o item (b):

$$\begin{aligned} \mathrm{Vol}(U) &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \big(r^2\cos^2(\theta) - r^2\mathrm{sen}^2(\theta) + 11 \big) \, r \, drd\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \big(r^2\cos(2\theta) + 11 \big) \, r \, drd\theta \\ &= \left(\int_0^1 r^3 \, dr \right) \left(\int_0^{2\pi} \cos(2\theta) \, d\theta \right) + 11\pi \\ &= \frac{1}{4} \, . \, 0 + 11\pi \\ &= 11\pi \, . \end{aligned}$$

2. Seja
$$R = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 0 \le x \le \frac{\pi}{2} \;,\; \operatorname{sen}(x) \le y \le \cos(x) \right\}.$$

(a) **(1.0)** Escreva a fronteira de R como reunião de curvas da forma
$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = f(x),\, a \le x \le b\}$$
ou da forma
$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = g(y),\, c \le y \le d\};$$
explicitando f, a, b ou g, c, d, conforme o caso.

(b) **(1.0)** Seja $F(x,y)$ uma função contínua definida na região R. Escreva a integral dupla
$$I = \iint_R F(x,y)\, dxdy$$
obrigatoriamente na forma de uma integral iterada, integrando primeiro com respeito a y e em seguida com respeito a x. (*Neste item não é pedido o cálculo da integral.*)

(c) **(1.0)** Escreva a integral dupla do item (b) obrigatoriamente como uma soma de integrais iteradas, integrando primeiro com respeito a x e em seguida com respeito a y. (*Neste item não é pedido o cálculo da integral.*)

(d) **(1.0)** <u>Calcule</u>
$$I = \iint_R x\, dxdy\,.$$

Solução:

(a) As curvas $y = \operatorname{sen}(x)$ e $y = \cos(x)$ intersectam-se em $x = \frac{\pi}{4}$. Logo, a região R pode ser descrita como
$$R = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 0 \le x \le \frac{\pi}{4} \;,\; \operatorname{sen}(x) \le y \le \cos(x) \right\}.$$

A fronteira de R é composta por três curvas
$$\partial R = L \cup S \cup C$$
onde
$$\begin{aligned}
L &= \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x = 0 \;,\; 0 \le y \le 1 \right\},\\
S &= \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; y = \operatorname{sen}(x) \;,\; 0 \le x \le \frac{\pi}{4} \right\},\\
C &= \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; y = \cos(x) \;,\; 0 \le x \le \frac{\pi}{4} \right\}.
\end{aligned}$$

(b) Utilizando a descrição de R feita acima, temos que

$$I = \iint_R F(x,y)\,dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_{sen(x)}^{cos(x)} F(x,y)\,dydx\,.$$

(c) Para descrever R como uma região do "Tipo II", devemos dividi-la em duas sub-regiões: $R = R_1 \cup R_2$. Observando que $y = \operatorname{sen}(x) \Leftrightarrow x = \operatorname{arcsen}(y)$, $y = \cos(x) \Leftrightarrow x = \arccos(y)$ e $\operatorname{sen}(\frac{\pi}{4}) = \cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, temos:

$$R_1 = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le y \le \frac{\sqrt{2}}{2}\ ,\ 0 \le x \le \operatorname{arcsen}(y) \right\},$$

$$R_2 = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{\sqrt{2}}{2} \le y \le 1\ ,\ 0 \le x \le \arccos(y) \right\}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
I &= \iint_R F(x,y)\,dxdy \\
&= \iint_{R_1} F(x,y)\,dxdy + \iint_{R_2} F(x,y)\,dxdy \\
&= \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \int_0^{arcsen(y)} F(x,y)\,dxdy + \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} \int_0^{arccos(y)} F(x,y)\,dxdy\,.
\end{aligned}$$

(d) Utilizando o item (b), temos que

$$\begin{aligned}
I &= \iint_R x\,dxdy \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_{sen(x)}^{cos(x)} x\,dydx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (x\cos(x) - x\operatorname{sen}(x))\,dx \\
&= \left(x\operatorname{sen}(x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{sen}(x)\,dx \right) - \left(-x\cos(x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(x)\,dx \right) \\
&= \left[\frac{\pi\sqrt{2}}{8} - \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \right] - \left[-\frac{\pi\sqrt{2}}{8} + \frac{\sqrt{2}}{2} \right] \\
&= \frac{\pi\sqrt{2}}{4} - 1\,.
\end{aligned}$$

3. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x, y) = 6xy^2 - 2x^3 - 3y^4 \,.$$

(a) **(1.0)** Encontre um vetor normal N ao gráfico de f num ponto $(a, b, f(a, b))$.

(b) **(1.0)** Encontre um ponto do gráfico de f tal que o plano tangente ao gráfico de f neste ponto é horizontal; ou seja, o plano é da forma $z = c$ (c constante);

Solução:

(a) Um vetor normal ao gráfico no ponto é $N = (-f_x(a, b), -f_y(a, b), 1)$, ou um múltiplo deste por um número real $\lambda \neq 0$.

Daí,

$$N = (-6b^2 + 6a^2, -12ab + 12b^3, 1)\,.$$

(b) O plano tangente ao gráfico de f em um ponto (a, b, c) é horizontal se seu vetor normal é paralelo ao vetor $(0, 0, 1)$, ou seja, se $f_x(a, b) = 0$ e $f_y(a, b) = 0$. Impondo estas condições, obtemos o seguinte:

$$f_x(x, y) = 6y^2 - 6x^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y^2 - x^2 = 0 \qquad (1)$$

$$f_y(x, y) = 12xy - 12y^3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y(12x - 12y^2) = 0 \qquad (2)$$

Da equação (2) temos que: se $y = 0$, então, por (1), $x = 0$. Ou seja, no ponto $(0, 0, f(0, 0)) = (0, 0, 0)$ o plano tangente ao gráfico de f é horizontal. Se $y \neq 0$, então $12x - 12y^2 = 0$, ou seja, $x = y^2$. Substituindo em (1), temos $y^2 - y^4 = 0$, ou seja $y = \pm 1$. Se $y = 1$, então $x = y^2$ implica que $x = 1$. Logo, no ponto $(1, 1, f(1, 1)) = (1, 1, 1)$ o plano tangente ao gráfico de f também é horizontal. Analogamente, se $y = -1$, então $x = 1$, e obtemos o ponto $(1, -1, f(1, -1)) = (1, -1, 1)$.

Assim, a resposta ao segundo item é $(0, 0, 0)$ ou $(1, 1, 1)$ ou $(1, -1, 1)$.

Folha de Rascunho