PUC RIO

P2 de Cálculo a Várias Variáveis I
MAT 1162 — 2012.1
26 de maio de 2012

Nome: ______________________ Matrícula: __________

Assinatura: ______________________ Turma: __________

Questão	Valor	Nota	Revisão
1	3.5		
2	3.0		
3	2.5		
Teste	1.0		
Total	10.0		

Instruções

- Mantenha seu celular desligado durante toda a prova.
- Não é permitido usar nenhum tipo de calculadora ou dispositivo eletrônico.
- Não destaque as folhas da prova.
- A prova pode ser resolvida a lápis, caneta azul ou caneta preta. Não é permitido usar caneta vermelha ou verde.
- Você não tem o direito de consultar anotações.
- Desenvolva a solução de cada questão, de maneira clara e objetiva, na folha em que a mesma está enunciada. Utilize o verso da folha se necessário.
- <u>RESPOSTAS SEM JUSTIFICATIVAS NÃO SERÃO CONSIDERADAS</u>.

1. Seja $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = \cos(x)\cos(y),$$

onde D é um retângulo aberto do plano:

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; -\frac{\pi}{2} < x < \pi \;,\; -\frac{\pi}{2} < y < \pi \right\}.$$

(a) **(1.0)** Calcule os pontos críticos de f (em seu domínio D).

(b) **(1.0)** Encontre a aproximação quadrática $Q(x, y)$ de f em torno do ponto $(0, 0)$.

(c) **(0.5)** Encontre a equação cartesiana da curva de nível $Q(x, y) = \frac{1}{2}$ e identifique-a como sendo uma parábola, elipse, círculo ou hipérbole.

(d) **(1.0)** Encontre constantes reais a e b para que a seguinte equação seja satisfeita:

$$f_{xx}(x, y) + f_{yy}(x, y) + af_{xy}(x, y) + bf(x, y) = 0, \; \forall (x, y) \in D.$$

Solução:

(a) Temos que

$$f_x(x, y) = -\text{sen}(x)\cos(y)$$
$$f_y(x, y) = -\text{sen}(y)\cos(x)$$

Logo, $f_x(x, y) = 0 \Leftrightarrow \text{sen}(x) = 0$ ou $\cos(y) = 0$.

Se $\text{sen}(x) = 0$, então $\cos(x) \neq 0$. Assim, $f_y(x, y) = 0 \Leftrightarrow \text{sen}(y) = 0$. Logo $(0, 0)$ é um ponto crítico.

Se $\cos(y) = 0$, então $\text{sen}(y) \neq 0$. Assim, $f_y(x, y) = 0 \Leftrightarrow \cos(x) = 0$. Logo $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ é um ponto crítico.

(b) Temos que

$$f_{xx}(x, y) = -\cos(x)\cos(y),$$
$$f_{xy}(x, y) = \text{sen}(x)\,\text{sen}(y),$$
$$f_{yy}(x, y) = -\cos(y)\cos(x).$$

Logo, a matriz hessiana de f em (x, y) é a seguinte:

$$Hf(x, y) = \begin{pmatrix} -\cos(x)\cos(y) & \text{sen}(x)\,\text{sen}(y) \\ \text{sen}(x)\,\text{sen}(y) & -\cos(y)\cos(x) \end{pmatrix}.$$

No ponto $(0, 0)$:

$$Hf(0, 0) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Como $(0,0)$ é ponto crítico de f, temos que $\nabla f(0,0)$ é nulo. Logo,

$$\begin{aligned} Q(x,y) &= f(0,0) + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2 \end{aligned}$$

(c) Como

$$\begin{aligned} Q(x,y) = \frac{1}{2} &\Leftrightarrow 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2 = \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1, \end{aligned}$$

segue que a curva é um círculo de raio 1 centrado na origem.

(d) Observe que

$$f_{xx}(x,y) + f_{yy}(x,y) = -2\cos(x)\cos(y) = -2f(x,y).$$

Logo,

$$f_{xx}(x,y) + f_{yy}(x,y) + 2f(x,y) = 0,$$

e então basta tomar $a = 0$ e $b = 2$ para que a equação diferencial seja satisfeita.

2. Seja

$$f(x, y) = 5x^2 + 5y^2 - 6xy - 4x - 4y - 4\,.$$

(a) **(1.5)** Encontre uma matriz ortogonal

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}$$

tal que, através da mudança de coordenadas

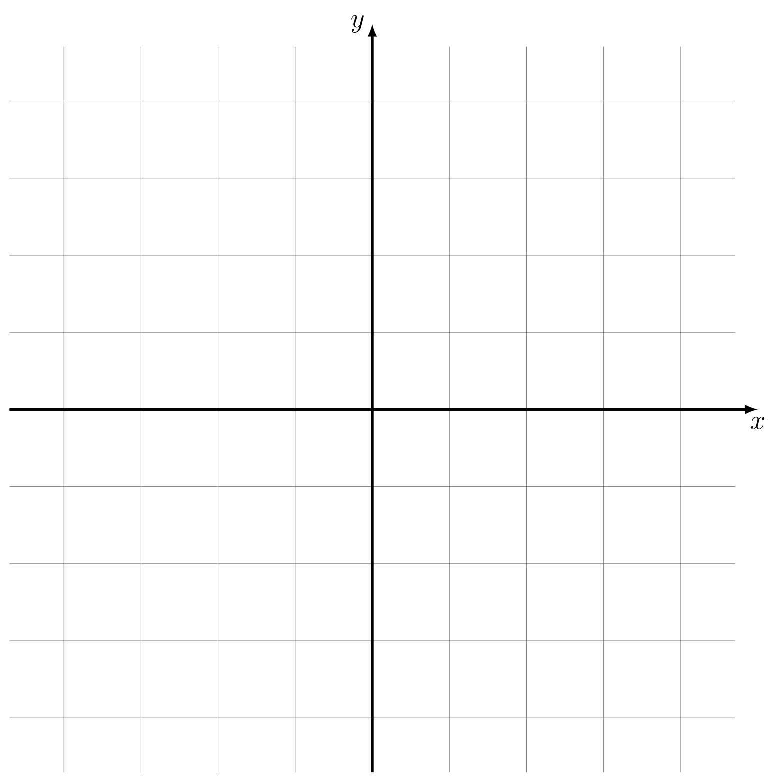
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

(ou seja, tomando $x = p_{11}\, x' + p_{12}\, y'$ e $y = p_{21}\, x' + p_{22}\, y'$), podemos reescrever $f(x, y)$ na forma

$$\tilde{f}(x', y') = ax'^2 + by'^2 + cx' + dy' + e.$$

Explicite o valor das constantes reais a, b, c, d, e.

(b) **(1.0)** Deduza que a curva $f(x, y) = 0$ é uma elipse, explicitando seu centro e semi-eixos. Desenhe-a corretamente, considerando sua posição com relação aos eixos cartesianos abaixo.



Solução:

(a) Seja

$$M = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$$

a matriz associada à parte quadrática de f, i.e.,

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 5x^2 + 5y^2 - 6xy.$$

Os autovalores de M são $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 8$. Seus respectivos autovetores associados são $v_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ e $v_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ (observe que v_1 e v_2 têm norma 1 e são ortogonais entre si, logo formam uma base ortonormal para o $\mathbb{R}^2$).

Afirmamos que a matriz P de mudança de base é

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

De fato, aplicando a mudança de variáveis

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

(ou seja, tomando $x = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' - y')$ e $y = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' + y')$), f é reescrita como

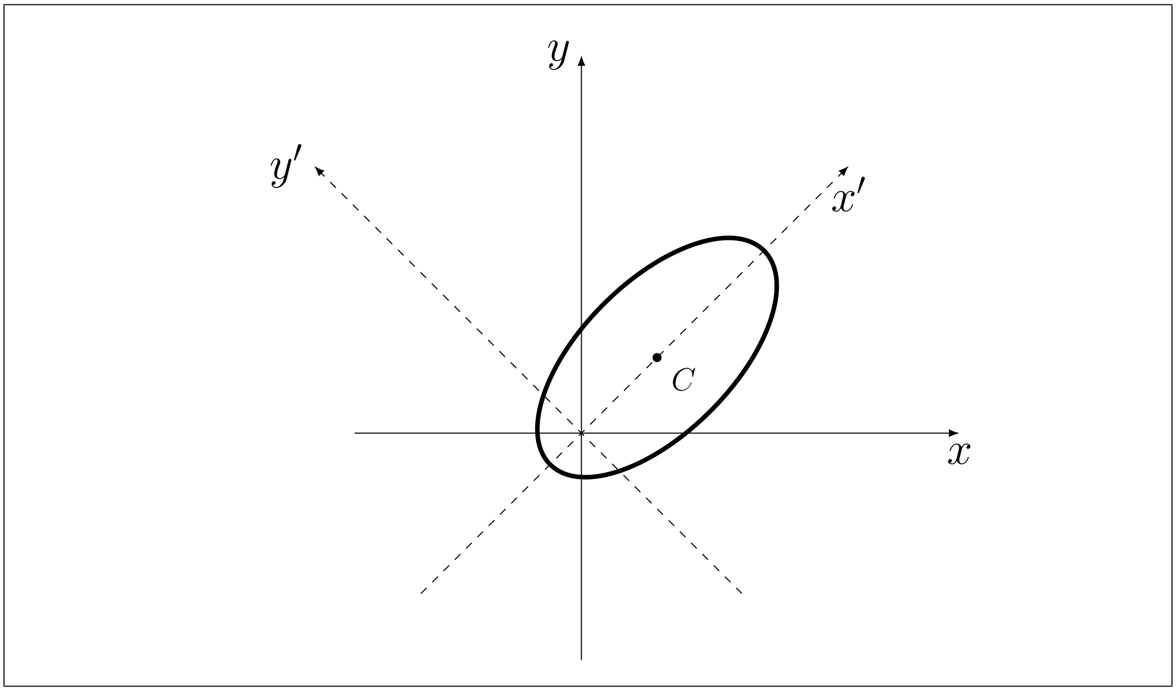
$$\begin{aligned} \tilde{f}(x', y') &= 2x'^2 + 8y'^2 - 2\sqrt{2}(x' - y') - 2\sqrt{2}(x' + y') - 4 \\ &= 2x'^2 - 4\sqrt{2}x' + 8y'^2 - 4 \end{aligned}$$

Logo, $a = 2$, $b = 8$, $c = -4\sqrt{2}$, $d = 0$, $e = -4$.

(b) Observe que $\tilde{f}(x', y') = 2\left(x' - \sqrt{2}\right)^2 + 8y'^2 - 8$. Logo

$$\begin{aligned} f(x, y) = 0 &\Leftrightarrow \tilde{f}(x', y') = 0 \\ &\Leftrightarrow 2\left(x' - \sqrt{2}\right)^2 + 8y'^2 = 8 \\ &\Leftrightarrow \frac{(x' - \sqrt{2})^2}{4} + y'^2 = 1, \end{aligned}$$

a qual é a equação de uma elipse centrada em $(x', y') = (\sqrt{2}, 0)$, com semi-eixos 2 e 1, como ilustrado na figura abaixo. No sistema de coordenadas usual essa elipse tem centro $(x, y) = (1, 1)$



y
y'
x'
C
x

3. Seja

$$F(u,v) = f(x(u,v), y(u,v)),\ (u,v) \in D$$

onde

- $x(u,v) = u,$ e $y(u,v) = uv$
- $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função com derivadas parciais de primeira e segunda ordem contínuas
- $D = \Big\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \;\Big|\; u > 0\Big\}$ (o semiplano aberto).

(a) **(1.5)** Calcule F_{uu} (a derivada parcial de segunda ordem de F com relação a u) em função de x, y, f_x, f_y, f_{xx}, f_{xy} e f_{yy}.

(b) **(1.5)** Considere que $f(1,1) = 1$ e que $f_x(1,1) = f_y(1,1) = 1$. Escreva a equação paramétrica da reta normal à curva de nível $F(u,v) = 1$ no ponto $(1,1)$.

Solução:

(a) Temos que

$$\frac{\partial F}{\partial u} = f_x \frac{\partial x}{\partial u} + f_y \frac{\partial y}{\partial u} = f_x.1 + f_y.v$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 F}{\partial u^2} &= \frac{\partial}{\partial u}(f_x) + \frac{\partial}{\partial u}(f_y\, v) \\
&= \frac{\partial}{\partial u}(f_x) + \left(\frac{\partial}{\partial u} f_y\right) v \\
&= f_{xx}\frac{\partial x}{\partial u} + f_{yx}\frac{\partial y}{\partial u} + \left(f_{xy}\frac{\partial x}{\partial u} + f_{yy}\frac{\partial y}{\partial u}\right) v \\
&= f_{xx} + f_{yx}v + \big(f_{xy} + f_{yy}v\big)\, v \\
&= f_{xx} + f_{yx}v + f_{xy}v + f_{yy}v^2 \\
&= f_{xx} + 2v\, f_{xy} + v^2\, f_{yy}
\end{aligned}$$

Como $u = x$ e $y = uv$, temos que $v = \frac{y}{x}$, e então

$$\frac{\partial^2 F}{\partial u^2} = f_{xx} + \frac{2y}{x}\, f_{xy} + \frac{y^2}{x^2}\, f_{yy}.$$

(b) Como

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial F}{\partial u}(1,1) = 1 + 1 = 2, \\
&\frac{\partial F}{\partial v}(1,1) = f_x(1,1)\frac{\partial x}{\partial v}(1,1) + f_y(1,1)\frac{\partial y}{\partial v}(1,1) = 0 + 1 \times 1 = 1,
\end{aligned}$$

segue que $\nabla F(1,1) = (2,1)$. A equação paramétrica da reta normal é então

$$\begin{aligned} \alpha(t) &= (1,1) + t\,\nabla F(1,1) \\ &= (1,1) + t(2,1) \\ &= (1+2t, 1+t), \quad t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$