P3 de Cálculo a Várias Variáveis I -gabarito
MAT 1162 — 2011.2
Data: 25 de novembro de 2011

1. Considere a região R do plano descrita por

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\ 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1,\ x^2 + y^2 \geq 1\}.$$

   (a) **(1.0)** Esboce a região e calcule sua área.

   Solução: A região R é um quadrado de lado 1 menos um quadrante de disco de raio 1. Portanto sua área é $A = 1 - \frac{\pi}{4}$.

   (b) **(2.0)** Encontre as coordenadas do centróide de R.

   Solução: Para a abcissa do centróide calculamos

$$Ix = \iint_R x \, dA.$$

   A integral dupla no quadrado de lado 1 é

$$Ix1 = \int_{x=0}^{1} \int_{y=0}^{1} x \; dydx = \frac{1}{2},$$

   enquanto que a integral dupla no quadrante é

$$Ix2 = \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{r=0}^{1} r\cos(\theta) \cdot \; rdrd\theta = \frac{1}{3}.$$

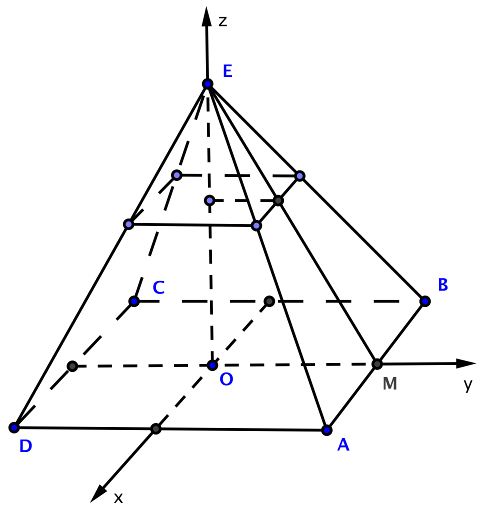
   Segue que $Ix = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$. Portanto $\overline{x} = \frac{2}{3(4-\pi)}$. Como a figura é simétrica com relação a reta $y = x$, concluímos que $\overline{y} = \overline{x} = \frac{2}{3(4-\pi)}$.

2. Considere a pirâmide P de base quadrada cujos vértices são $A = (1, 1, 0)$, $B = (-1, 1, 0)$, $C = (-1, -1, 0)$, $D = (1, -1, 0)$ e $E = (0, 0, 2)$. Calcule a integral tripla de $f(x, y, z) = z^2$ em P.

   Sugestão: Calcule o lado da seção da pirâmide na altura z usando o triângulo OME da figura.

   Solução: No triângulo OME vemos que

$$\frac{2-z}{2} = \frac{l(z)}{1},$$



onde o lado do quadrado $R(z)$ na altura z é $2l(z)$. Concluímos que este lado é $2-z$. Portanto

$$\iiint\limits_P z^2\ dV = \int_{z=0}^{2} \iint\limits_{R(z)} z^2\ dA\ dz = \int_{z=0}^{2} z^2(2-z)^2 dz,$$

onde usamos que z^2 é constante em $R(z)$ e que a área de $R(z)$ é $(2-z)^2$. Portanto

$$\iiint\limits_P z^2\ dV = \int_0^2 4z^2 - 4z^3 + z^4\ dz = \frac{32}{3} - 16 + \frac{32}{5} = \frac{16}{15}.$$

3. Denote por B a bola de raio R centrada na origem, i.e.,

$$B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 |\ x^2+y^2+z^2 \le R^2\}.$$

Supondo que a bola tenha massa M e seja feita de material homogêneo, o momento de inércia de B em relação ao eixo z é definido por

$$I = \frac{M}{V(B)} \iiint\limits_B r^2\ dV,$$

onde $r = \sqrt{x^2+y^2}$ é a distância ao eixo z e $V(B)$ é o volume da bola. Calcule o momento de inércia I em função de M e R.

Solução: Em coordenadas esféricas, $r^2 = \rho^2 \sin^2\phi$. Portanto

$$I = \frac{3M}{4\pi R^3} \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\phi=0}^{\pi} \int_{\rho=0}^{R} \rho^2 \sin^2\phi \cdot \rho^2 \sin\phi\ d\rho d\phi d\theta,$$

$$I = \frac{3MR^2}{10} \int_{\phi=0}^{\pi} \sin^3\phi\ d\phi.$$

Como $\int \sin^3\phi d\phi = \frac{\cos^3\phi}{3} - \cos\phi + C$, concluímos que

$$I = \frac{3MR^2}{10}\left(-\frac{2}{3}+2\right) = \frac{2MR^2}{5}.$$