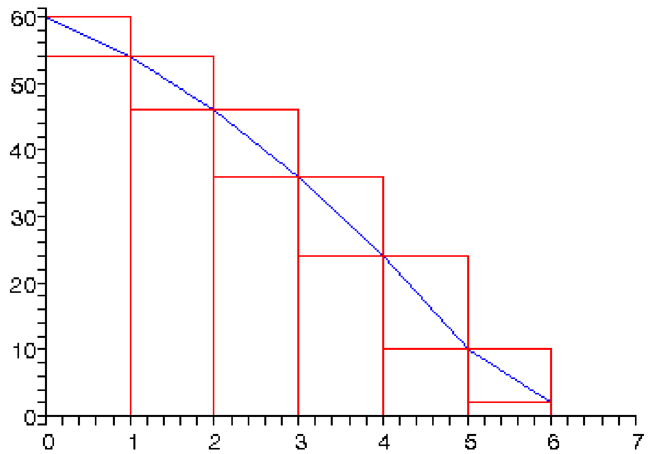
P1 cálculo B, 2009.1

solução da 1ª questão.

É dada a taxa de variação r(t) da quantidade de matéria Q(t), ou seja , r(t)=Q'(t). Queremos Q(6). Pelo teorema fundamental do cálculo, Q(6)= Q(0)+ int(r(t}, t=0..6) Sabemos que Q(0)=0. Não temos a expressão de r(t) mas temos 7 valores. Vamos então aproximar a integral pelo método dos retângulos. Como é dado que a função é decrescente, podemos garantir que pegando os ponto à esquerda temos uma aproximação superior e pegando os pontos à direita temos um aproximação inferior, como se vê na figura,que pode ser feita a mão. Na figura está indicado um possível gráfico de r(t).



A aproximação por retângulos com o ponto a esquerda é sum(r(i)*dx,i=0..5) , como o intervalo dx é 1, fica apenas a soma r(0)+r(1)+...+r(5)=230

A aproximação por retângulos com o ponto a direita é sum(r(i)*dx,i=1..6) , como o intervalo dx é 1, fica apenas a soma r(1)+r(1)+...+r(6)=172

Obs: Se usarmos um valor aproximado para a função r(t), obtido por tentativa e exame de figura, ao ser integrada de 0 a 6, fornece uma aproximação para Q(t), que não sabemos se é superior ou inferior.

O problema do tanque de óleo que vasa, se resolve da mesma maneira. A única diferença é que nas somas temos dx=2. E a resposta é aprox. superior =70, aprox. inf=63,2

Questão 2.

```
> restart;
> f:=int(sin(t^2),t=Pi/4..x);
```

$$f := -\frac{1}{2}\,\mathrm{FresnelS}\left(\frac{\sqrt{2}\,\sqrt{\pi}}{4}\right)\sqrt{2}\,\sqrt{\pi}+\frac{1}{2}\sqrt{2}\,\sqrt{\pi}\,\mathrm{FresnelS}\left(\frac{\sqrt{2}\,x}{\sqrt{\pi}}\right)$$

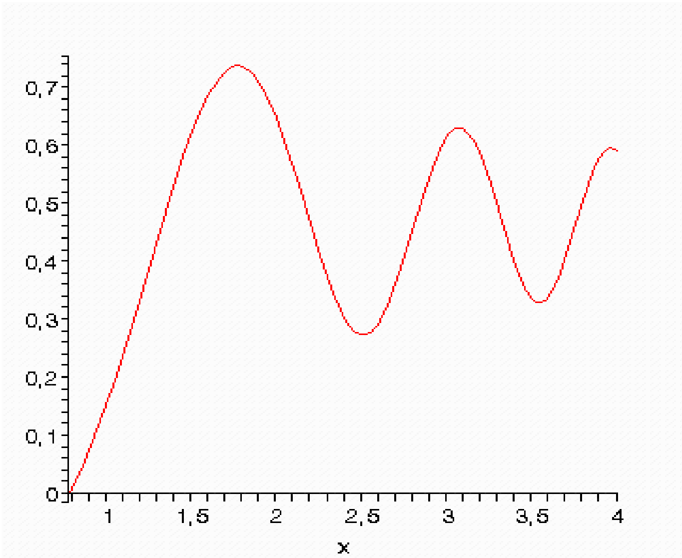
calculando a derivada:

```
> f1:=diff(f,x);
```

$$f1 := \sin(x^2)$$

```
> fazendo o gráfico:

> plot(f,x=Pi/4..4);
```



vemos que o primeiro máximo ocorre entre 1 e 2. e o primeiro mínimo entre 2 e3. Calculamos o ponto onde a derivada é zero, entre 1 e 2 e depois entre 2 e 3.:

```
> ma:=fsolve(f1=0,x=0.1..2);
```

$$ma := 1.772453851$$

```
> mi:=fsolve(f1=0,x=2..3);
```

$$mi := 2.506628275$$

para o ponto de inflexão, calculamos a derivada segunda. O gráfico mostra que a inflexão está entre 1 e 1.5.

```
> f2:=diff(f1,x);
```

$$f2 := 2\cos(x^2)\,x$$

```
> infl:=fsolve(f2=0,x=0..1.5);
```

$$infl := 1.253314137$$

agora calculamos as ordenadas do ponto de máximo local, mínimo local e inflexão respectivamente.:

```
> oma:=evalf(subs(x=ma,f));
```

$$oma := 0.7376768017$$

```
> omi:=evalf(subs(x=mi,f));
```

$$omi := 0.2732530573$$

```
> oinfl:=evalf(subs(x=infl,f));
```

$$oinfl := 0.3921217172$$

questão 3) Calcule as integrais.

a. $\int_0^2 \frac{2x+x^2}{\sqrt{x}}\,dx = \int_0^2 2x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{3}{2}}\,dx$ = $\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}\Big]_0^2$ = $\frac{4x^{\frac{3}{2}}}{3}+2\frac{x^{\frac{5}{2}}}{5}\Big]_0^2$ = $\frac{4\cdot 2^{\frac{3}{2}}}{3}+\frac{2\cdot 2^{\frac{5}{2}}}{5}$ =

$\frac{64}{15}\cdot\sqrt{2}$

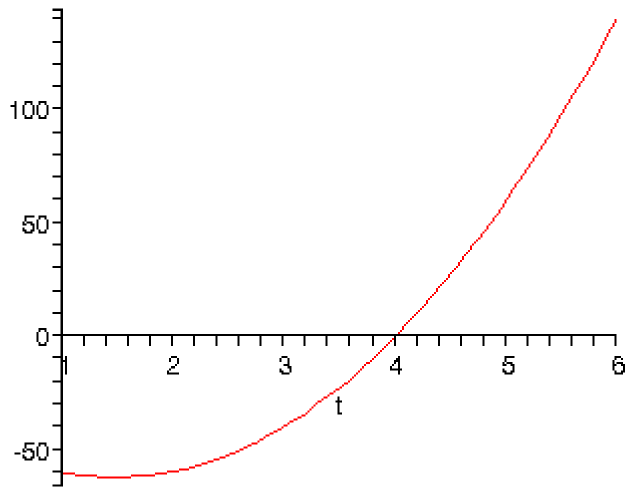
b. $\int \frac{x}{(x^2-1)^2}\,dx$ $u=x^2-1 \quad du=2x\ dx$ logo $\frac{1}{2}\cdot\int u^{-2}\,du=\frac{1}{2}\cdot\frac{u^{-1}}{-1}+C$ =

$\frac{-1}{2}\cdot(x^2-1)^{-1}+C$

c. $\int_{-1}^{1} 5\mathrm{x}^4 - 2\mathrm{x}^2\, dx = 5\frac{x^5}{5} - 2\frac{x^3}{3}\,]_{-1}^{1} = \frac{2}{3}$

d. $\int x\cos(x^2)\,dx \quad u=x^2 \quad du=2x\;\;dx$ logo $\frac{1}{2}\int \cos(u)\,du = \frac{1}{2}\cdot sen(u)+C = \frac{1}{2}\cdot sen(x^2)+C$

Questão 4: O gráfico de v(t) é uma parábola com concavidade para cima. Calculamos os pontos de corte com o eixo x, resolvendo a equação v(t)=0, obtendo os valores -1 e 4. O ponto de mínimo é a média aritmética: 1,5. O valor de v em 1.5 é -52,5. Com esses valores fazemos a figura:



Vemos que do tempo 1 ao tempo 4 o automóvel se desloca n sentido oposto ao da orientação dada à estrada. Ele para no tempo 4 e recomeça a se mover no outro sentido. Para achar onde está o automóvel no tempo 6 basta calcular a integral de v(t), para t indo de 1 a 6.

$$\int_1^6 (10t^2 - 30t - 40)dt = -25/3.$$

Ou seja o automóvel está a 25/3 km do ponto de partida, aproximadamente 8,33 km.

Para saber a distância efetivamente percorrida, devemos calcular a distância percorrida até o instante 4, quando o automóvel para e começa a voltar:

$$\int_1^4 (10t^2 - 30t - 40)dt = -135.$$

O automóvel andou 135 km, parou e voltou até ficar a 25/3 km do ponto de partida, ou seja andou 2x135-25/3=261+2/3 ou seja aproximadamente 261.66 km.

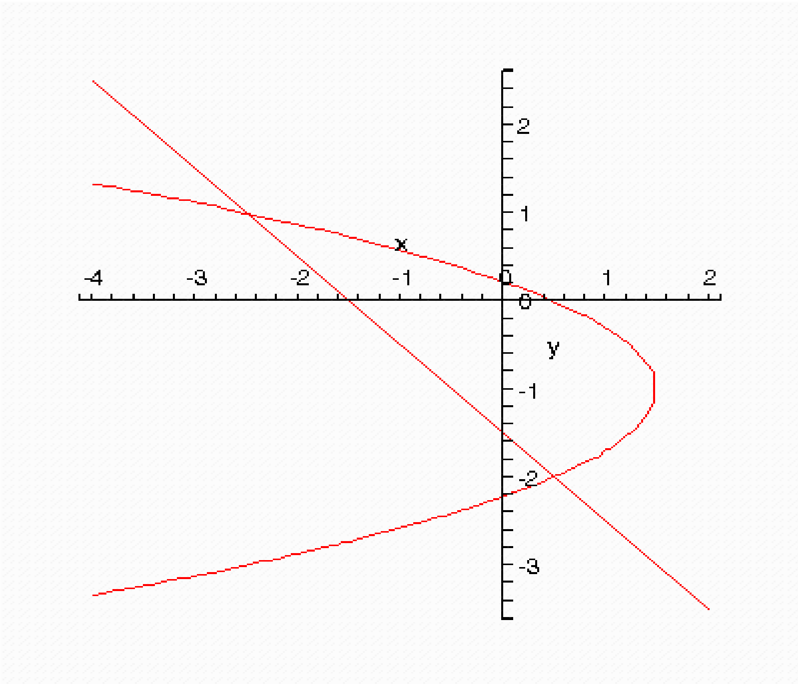
Este é o resultado que se obtém calculando a integral de |v(t)| de 1 a 6.

questão 5

Considere a região do plano delimitada pela reta e pela parábola: $y+x+\frac{3}{2}=0$ e $y^2+2y+x=\frac{1}{2}$.

a. Esboce a região
b. Integrando em x, escreva uma integral, ou soma de integrais, que represente(m) a área desta região
c. Integrando em y, escreva uma integral, ou soma de integrais, que represente(m) a área desta região.
d. Calcule a área desta região.

a) A reta passa nos pontos (0,-3/2) e (-3/2,0). A parábola é x=-y^2-2y+1/2. Logo tem concavidade para a esquerda , passa em (1/2,0) e em (0,-1+sqrt(3/2) e (0, -1-sqrt(3/2)), obtidos fazendo respectivamente y=0 e x=0 na equação da parábola. A parábola e a reta se cortam em 2 pontos obtidos resolvendo o sistema: y+x+3/2=0 e y^2+2y+x=1/2, que dá os pontos: (1/2,-2) e (-5/2,1). Com esses dados fazemos a figura:



b)para escrever a integral em x que dá a área é preciso escrever a parábola como y(x) , o que dá y=-1+1/2*(6-4*x)^(1/2) para o arco de cima e y=-1-1/2*(6-4*x)^(1/2) para o arco de baixo. Temos então uma soma de duas integrais :

$$\int_{-\frac{5}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{6-4x}+x\,dx+\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \sqrt{6-4x}\,dx$$

c)para a integral em y devemos ter a parábola e a reta como x(y).

$$\int_{-2}^{1} 2-y-y^2\,dy$$

d)resolvendo a 2a integral, obtemos a primitiva:f(y)= $2y-y^2/2-y^3/3$ e a resposta é f(1)-f(-2)=9/2.