P2 de Cálculo a Várias Variáveis I
MAT 1162 — 2011.2
Data: 24 de outubro de 2011

1. Considere a função

$$u(x,t) = \sin(\pi x) \cdot \exp(-2\pi^2 t).$$

(a) **(1.0)** Encontre a aproximação quadrática $Q(x,t)$ de $u(x,t)$ em torno do ponto $x_0 = \frac{1}{2}, t_0 = 0$.

Solução: Calculando as derivadas parciais obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= \pi \cos(\pi x) \cdot \exp(-2\pi^2 t) \\
\frac{\partial u}{\partial t} &= -2\pi^2 \sin(\pi x) \cdot \exp(-2\pi^2 t) \\
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= -\pi^2 \sin(\pi x) \cdot \exp(-2\pi^2 t) \\
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= 4\pi^4 \sin(\pi x) \cdot \exp(-2\pi^2 t) \\
\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} &= -2\pi^3 \cos(\pi x) \cdot \exp(-2\pi^2 t)
\end{aligned}$$

No ponto $x_0 = \frac{1}{2}, t_0 = 0$, temos

$$\frac{\partial u}{\partial x}\left(\tfrac{1}{2}, 0\right) = 0,\ \frac{\partial u}{\partial t}\left(\tfrac{1}{2}, 0\right) = -2\pi^2,\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\left(\tfrac{1}{2}, 0\right) = -\pi^2,\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\left(\tfrac{1}{2}, 0\right) = 4\pi^4,\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}\left(\tfrac{1}{2}, 0\right) = 0.$$

Portanto

$$Q(x,t) = 1 - 2\pi^2 t - \frac{\pi^2}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 2\pi^4 t^2.$$

(b) **(1.0)** A curva de nível $Q(x,t) = 1$ é uma cônica. Faça um esboço desta cônica.

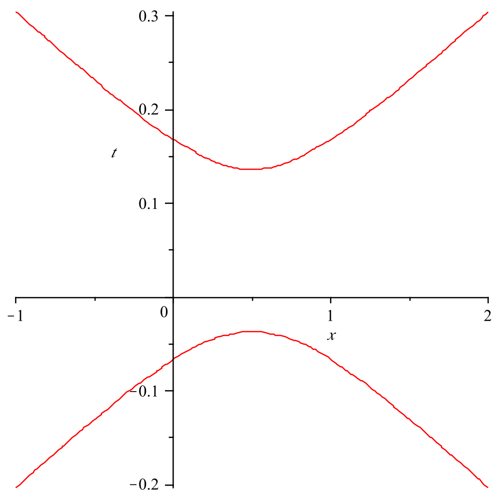
Solução: A curva de nível 1 de Q é dada pela equação

$$1 - 2\pi^2 t - \frac{\pi^2}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 2\pi^4 t^2 = 1.$$

Completando os quadrados obtemos

$$-\frac{\pi^2}{2}(x - \frac{1}{2})^2 + 2\pi^4\left(t - \frac{1}{2\pi^2}\right)^2 = \frac{1}{2},$$

que corresponde a uma hipérbole centrada no ponto $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2\pi^2})$ (ver figura abaixo).



(c) **(0.5)** Encontre $\alpha \in \mathbb{R}$ de forma que $u(x,t)$ satisfaça a equação diferencial

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Solução: Observamos no item (a) que fazendo $\alpha = 2$, $u(x,t)$ satisfaz a equação diferencial (do calor) acima.

2. Considere a função

$$f(x,y) = x^2 + xy + y^2 + x^3.$$

(a) **(1.0)** Encontre os pontos críticos de f.

Solução: Temos que $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + y + 3x^2$ e $\frac{\partial f}{\partial y} = x + 2y$. Igualando as derivadas parciais a zero obtemos $x = -2y$ e $-3y + 12y^2 = 0$. Segue que $P_1 = (0,0)$ e $P_2 = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ são os pontos críticos de f.

(b) **(1.0)** Classifique os pontos críticos de f como máximo local, mínimo local ou sela.

Solução: Como $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 + 6x$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 1$, as matrizes hessianas em P_1 e P_2 são respectivamente

$$H_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad H_2 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Como H_1 tem determinante e traço positivos, P_1 é mínimo local. E como H_2 tem determinante negativo, P_2 é ponto de sela.

(c) **(0.5)** Algum dos pontos críticos de f é extremo global?

Solução: O único candidato a extremo global é o ponto P_1, que é mínimo local. Mas não é mínimo global, pois $f(P_1) = 0$ e por exemplo $f(-2, 0) = -4 < 0$.

3. Considere a função

$$f(x, y) = x^2 + 3y^2 + xy$$

definida no paralelogramo

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | \ -1 \leq x + y \leq 1, \ -1 \leq y \leq 1 \ \}.$$

(a) **(0.5)** Encontre os pontos críticos de f no interior de D.

Solução: Temos que $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + y$ e $\frac{\partial f}{\partial y} = x + 6y$. Igualando as derivadas parciais a zero obtemos $P_0 = (0, 0)$ como o único ponto crítico no interior do domínio.

(b) **(1.5)** Encontre os candidatos a extremos de f em D que estejam na fronteira de D.

Solução: Para encontrar candidatos a extremo global na fronteira do paralelogramo, devemos utilizar multiplicadores de Lagrange em cada um dos seus lados. Os vértices $P_1 = (0, 1)$, $P_2 = (-2, 1)$, $P_3 = (0, -1)$ e $P_4 = (2, -1)$ são naturalmente candidatos.

Para o lado $x + y = 1$, a equação de Lagrange nos dá $(2x + y, x + 6y)$ paralelo a $(1, 1)$. Isto significa que $2x + y = x + 6y$, $x = 5y$. Encontramos então o ponto $P_5 = (\frac{5}{6}, \frac{1}{6})$. Procedendo de forma análoga obtemos o ponto $P_6 = (-\frac{5}{6}, -\frac{1}{6})$ no lado $x + y = -1$.

Para o lado $y = 1$, a equação de Lagrange nos diz que $(2x+y, x+6y)$ é paralelo a $(0, 1)$. Portanto $2x+y = 0$ e obtemos o ponto $P_7 = (-\frac{1}{2}, 1)$. Analogamente temos o candidato $P_8 = (\frac{1}{2}, -1)$ no lado $y = -1$.

(c) **(1.0)** Encontre, caso existam, os pontos de máximo e mínimo globais de f em D.

Solução: O domínio D é compacto e f é contínua. Segue então do teorema de Weierstrass que f possui pelo menos um máximo e um mínimo globais em D.

Os candidatos a extremo global são $P_0, P_1, ..., P_8$. Avaliando a função f neste pontos temos $f(P_0) = 0$, $f(P_1) = f(P_3) = 3$, $f(P_2) = f(P_4) = 5$, $f(P_5) = f(P_6) = \frac{33}{36}$ e $f(P_7) = f(P_8) = \frac{11}{4}$. Segue que P_0 é mínimo global e P_2 e P_4 são máximos globais de f em D.