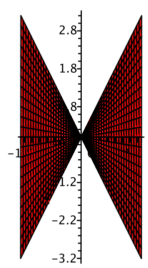
P1 de Cálculo a Várias Variáveis I
MAT 1162 — 2011.2-Gabarito
Data: 06 de setembro de 2011

1. Considere a função
$$g(x, y) = \sqrt{4x^2 - y^2}.$$

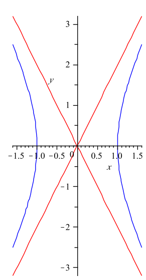
   (a) **(1.0)** Descreva e faça um esboço do domínio da função g.

   Solução: O domínio é formado pelos pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tais que $4x^2 - y^2 \geq 0$, ou, equivalentemente, $2|x| \geq |y|$.



   (b) **(1.0)** A curva de nível $g(x, y) = 2$ é uma cônica. Faça um esboço desta cônica indicando seus eixos. Em caso de hipérbole, indique também as suas assíntotas.

   Solução: A equação da curva de nível 2 de g é $4x^2 - y^2 = 4$, que corresponde a uma hipérbole centrada na origem, com eixos paralelos aos eixos coordenados e assíntotas $y = \pm 2x$.



(c) **(1.0)** Encontre a equação da reta tangente à curva de nível de g que passa pelo ponto $(\sqrt{2}, 2)$.

Solução: Podemos encontrar a equação da reta tangente à hipérbole de (b) no ponto $(\sqrt{2}, 2)$ calculando o gradiente de $h(x, y) = 4x^2 - y^2$ neste ponto. Temos $\nabla h(\sqrt{2}, 2) = (8\sqrt{2}, -4)$. Portanto a equação da reta procurada pode ser escrita como $8\sqrt{2}(x - \sqrt{2}) - 4(y - 2) = 0$ ou equivalentemente $y = 2\sqrt{2}x - 2$.

2. Considere a superfície S descrita pela equação

$$x^2 - x + xy + 2z = 4.$$

(a) **(1.0)** Encontre a equação do plano tangente à S no ponto $(1, 0, 2)$.

Solução: O gradiente de $h(x, y, z) = x^2 - x + xy + 2z$ no ponto $(1, 0, 2)$ é $\nabla h(1, 0, 2) = (1, 1, 2)$. Portanto a equação do plano tangente procurado é $(x - 1) + y + 2(z - 2) = 0$ ou equivalentemente $x + y + 2z = 5$.

(b) **(1.0)** Encontre 1 ponto de S para o qual o plano tangente à S seja horizontal.

Solução: Para que o plano tangente em (x_0, y_0, z_0) seja horizontal, precisamos que $\nabla h(x_0, y_0, z_0) = (2x_0 - 1 + y_0, x_0, 2)$ seja vertical. Portanto temos as condições $2x_0 + y_0 = 1, x_0 = 0$, ou seja, $x_0 = 0, y_0 = 1$. O único ponto de S com plano tangente horizontal é portanto $(0, 1, 2)$.

3. Considere a função

$$f(x, y) = \exp\left(2x + (y - 1)^2\right).$$

(a) **(1.0)** Calcule a derivada direcional de f em $(2, 1)$ na direção do vetor $(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$.

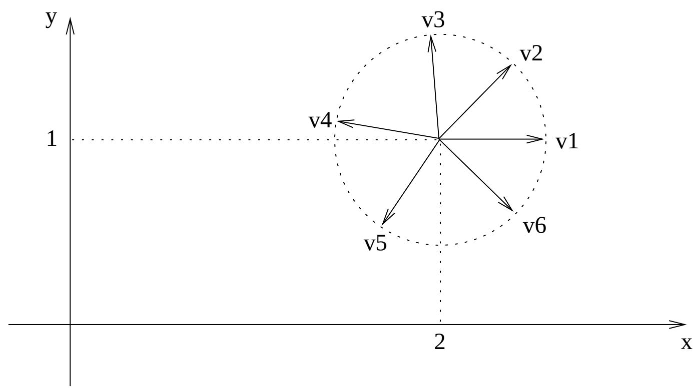
Solução: Temos que $\nabla f(2, 1) = \exp(4)(2, 0)$. Portanto

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(2, 1) = \nabla f(2, 1) \cdot \mathbf{v} = \exp(4)(2, 0) \cdot (\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}) = \exp(4)\sqrt{3}.$$

(b) **(1.0)** Encontre um vetor $\mathbf{u}$ tal que a derivada direcional de f em $(2, 1)$ na direção de $\mathbf{u}$ seja nula.

Solução: Para $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(2, 1) = 0$, devemos ter $\nabla f(2, 1) \cdot \mathbf{u} = 0$, ou seja, $\mathbf{u} = (0, \pm 1)$.

(c) **(1.0)** Para qual dos vetores da figura abaixo a derivada direcional da função $f(x, y)$ no ponto $(2, 1)$ é maior?



Solução: A derivada direcional em $(2, 1)$ é máxima para o vetor mais alinhado com o gradiente, no caso o vetor $\mathbf{v}_1$.