P4 de Cálculo a Várias Variáveis I
MAT 1162 — 2010.2- Gabarito

1. Considere a função $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy$.

   (a) **(1.0)** A curva de nível 1 de f é uma cônica. Esta cônica é uma parábola, elipse ou hipérbole? Quais os parâmetros?

   Solução: Definimos novas variáveis (u, v) através de uma rotação de ângulo $\frac{\pi}{4}$:

$$\begin{aligned} x &= \frac{\sqrt{2}}{2}(u - v) \\ y &= \frac{\sqrt{2}}{2}(u + v). \end{aligned}$$

   Substituindo na equação obtemos

$$\frac{1}{2}u^2 + \frac{3}{2}v^2 = 1,$$

   que corresponde a uma elipse de semi-eixos $\sqrt{2}$ e $\sqrt{\frac{2}{3}}$.

   (b) **(0.5)** Esboce a curva de nível 1 de f no plano xy.

   Solução: Ver figura 1.

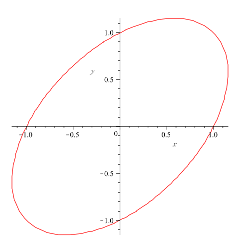

Figure 1: Elipse da questão 1(b).

2. Considere a função

$$f(x,y) = x^3 + xy^2 - 12x$$

definida em $\mathbb{R}^2$ e os pontos $P_1 = (0,0)$ e $P_2 = (-2,0)$.

(a) **(1.0)** Encontre as equações dos planos tangentes ao gráfico de f nestes pontos.

Solução: Temos que $\nabla(f) = (3x^2+y^2-12, 2xy)$ e portanto $\nabla f(P_1) = (-12,0)$, $\nabla f(P_2) = (0,0)$. Também $f(P_1) = 0$ e $f(P_2) = 16$. Portanto a equação dos planos tangentes em P_1 e P_2 são

$$\begin{aligned} z &= -12x \\ z &= 16. \end{aligned}$$

(b) **(1.0)** Encontre as aproximações quadráticas de Taylor de f em torno de P_1 e de P_2.

Solução: Temos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P_1) &= 0 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P_2) &= -12 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(P_1) &= 0 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(P_2) &= 0 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(P_1) &= 0 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(P_2) &= -4. \end{aligned}$$

e portanto as aproximações quadráticas de Taylor de f em torno de P_1 e de P_2 são

$$\begin{aligned} Q(x,y) &= -12x \\ Q(x,y) &= 16-6(x+2)^2-2y^2. \end{aligned}$$

(c) **(1.0)** Algum destes pontos é crítico? Em caso positivo, indique a natureza do ponto (máximo local, mínimo local ou sela).

Solução: Somente o ponto P_2 é crítico. Como os autovalores da Hessiana neste ponto são negativos, esta matriz é negativa definida e portanto P_2 é máximo local.

3. Considere a função $f(x,y) = x^2 - 2x + y^2$ definida sobre a elipse cheia

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ \frac{x^2}{4} + y^2 \leq 1\}.$$

(a) **(0.5)** Ache os pontos críticos de f no interior de E.

Solução: Temos que $\nabla(f) = (2x-2, 2y)$. Portanto o único ponto crítico no interior de E é o ponto $P_1 = (1,0)$.

(b) **(1.5)** Ache os candidatos a extremos na fronteira de E.

Solução: Sendo $g = \frac{x^2}{4} + y^2$, temos que $\nabla(g) = (\frac{x}{2}, 2y)$. Pela equação dos multiplicadores de Lagrange $\nabla f = \lambda \nabla g$ temos que $y = 0$ ou $\lambda = 1$. No primeiro caso obtemos os pontos $P_2 = (-2,0)$ e $P_3 = (2,0)$. No segundo caso obtemos $P_4 = (4/3, \sqrt{5}/3)$ e $P_5 = (4/3, -\sqrt{5}/3)$.

(c) **(0.5)** Encontre os valores máximo e mínimo de f em E.

Solução: Substituindo os candidatos na função objetivo, temos $f(P_1) = -1$, $f(P_2) = 8$, $f(P_3) = 0$, $f(P_4) = f(P_5) = -1/3$. Como o domínio é compacto e a função objetivo é contínua, concluímos que P_1 é mínimo global e P_2 máximo global.

4. Sendo

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | \; -1 \leq y \leq -\sqrt{x}, \; x \geq 0\},$$

calcule:

(a) **(1.5)** A área de R.

Solução: Observando um esboço da região R vemos que

$$A(R) = \int_{y=-1}^{0} \int_{x=0}^{y^2} 1 dx dy = \frac{1}{3}$$

(b) **(1.5)** A coordenada $\overline{y}$ do centróide de R.

Solução: Temos que

$$A(R)\overline{y} = \int_{y=-1}^{0} \int_{x=0}^{y^2} y dx dy = -\frac{1}{4}$$

Portanto $\overline{y} = -\frac{3}{4}$.