P4 de Cálculo a Várias Variáveis I
MAT 1162 — 2010.1-gabarito

1. Considere a função $f(x,y) = x^2 + y^2 + 4xy$.

   (a) **(1.0)** A curva de nível 3 de $f$ é uma cônica. Esta cônica é uma parábola, elipse ou hipérbole? Quais os parâmetros?

   **Solução:** Fazendo a mudança de variáveis

   $$\begin{aligned} x &= \frac{\sqrt{2}}{2}(x-y) \\ x &= \frac{\sqrt{2}}{2}(x+y) \end{aligned}$$

   obtemos a equação

   $$3u^3 - v^2 = 3,$$

   que corresponde a uma hipérbole com $a = 1$ e $b = \sqrt{3}$.

   (b) **(0.5)** Esboce a curva de nível 3 de $f$ no plano $xy$, indicando os eixos da cônica e seus parâmetros.

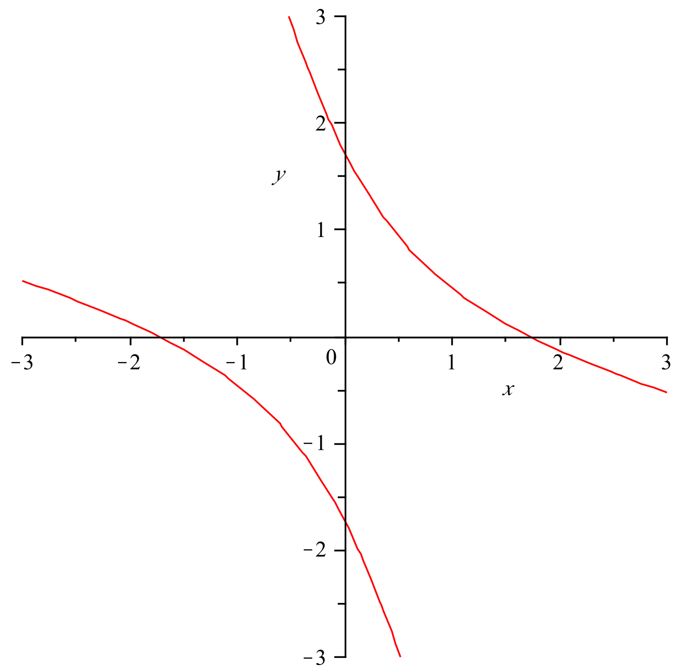
   **Solução:** Ver figura 1.

   (c) **(0.5)** Esboce, em um mesmo gráfico, as curvas de nível $-3$ e 0 de $f$.

   **Solução:** Após a mudança de coordenadas, temos a equação

   $$3u^3 - v^2 = c.$$

   Para $c = 0$, a curva de nível é um par de retas que se cruzam na origem. Para $c = -3$, temos uma hipérbole. (ver figura 2).




2. Considere a função

$$f(x, y) = y^4 + xy^2 - x - 1$$

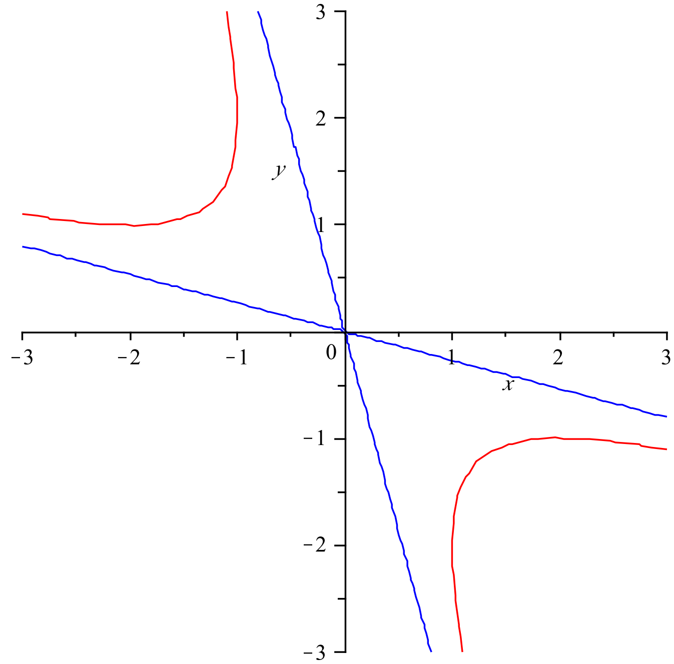
definida em $\mathbb{R}^2$ e os pontos $P_1 = (0, 0)$ e $P_2 = (-2, 1)$.

(a) **(1.0)** Encontre as equações dos planos tangentes ao gráfico de $f$ nestes pontos.

**Solução:** Temos que $\nabla f = (y^2 - 1, 4y^3 + 2xy)$ e portanto $\nabla f(P_1) = (-1, 0)$, $\nabla f(P_2) = (0, 0)$. As equações dos planos tangentes são portanto

$$\begin{aligned} z &= -1 - x \\ z &= 0 \end{aligned}$$

(b) **(1.0)** Encontre as aproximações quadráticas de Taylor de $f$ em torno de $P_1$ e de $P_2$.




**Solução:** Temos que

$$Hf(x,y) = \begin{bmatrix} 0 & 2y \\ 2y & 12y^2 + 2x \end{bmatrix}$$

e portanto

$$Hf(P_1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad Hf(P_2) = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$$

Segue que

$$\begin{aligned} Q_1(x,y) &= -1 - x \\ Q_2(x,y) &= 2(x+2)(y-1) + 4(y-1)^2 \end{aligned}$$

(c) **(1.0)** Algum destes pontos é crítico? Em caso positivo, indique a natureza do ponto (máximo local, mínimo local ou sela).

**Solução:** Apenas o ponto $P_2$ é crítico, pois seu gradiente é nulo. Observamos que a matriz hessiana em $P_2$ tem determinante negativo e portanto $P_2$ é ponto de sela.

3. Considere a função $f(x, y, z) = x^2 - 4x + y^2 + z^2$ definida sobre o elipsóide sólido

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | \ \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} + z^2 \leq 1\}.$$

   (a) **(0.5)** Ache os pontos críticos de $f$ no interior de $E$.

   **Solução:** Temos que $\nabla f(x, y, z) = (2x-4, 2y, 2z)$ e portanto o único ponto crítico no interior de $E$ é $P_1 = (2, 0, 0)$.

   (b) **(1.0)** Ache os candidatos a extremos na superfície do elipsóide
   (fronteira de $E$).

   **Solução:** Sendo $g(x, y, z) = \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} + z^2$, temos que $\nabla g = (\frac{2x}{9}, \frac{2y}{4}, 2z)$. A equação de lagrange nos diz então que

$$\begin{aligned} 9(x-2) &= \lambda x \\ 4y &= \lambda y \\ z &= \lambda z \end{aligned}$$

   Se $y \neq 0$, temos que $\lambda = 4$, $z = 0$, $x = \frac{18}{5}$, e chegamos a um absurdo.

Se $z \neq 0$, temos que $\lambda = 1$, $y = 0$, $x = \frac{9}{4}$, $z = \pm\frac{\sqrt{7}}{4}$. Obtemos então os candidatos $P_2 = (\frac{9}{4}, 0, \frac{\sqrt{7}}{4})$ e $P_3 = (\frac{9}{4}, 0, -\frac{\sqrt{7}}{4})$.
Se $y = z = 0$, temos que $x = \pm 3$. Temos então os candidatos $P_4 = (3, 0, 0)$ e $P_5 = (-3, 0, 0)$.

(c) **(0.5)** Encontre os valores máximo e mínimo de $f$ em $E$.

**Solução:** Como o domínio é compacto e $f$ é contínua, existem máximos e mínimos globais. Como os candidatos são $P_1, P_2, P_3, P_4$ e $P_5$, precisamos apenas avaliar a função nestes pontos. Temos $f(P_1) = -4$, $f(P_2) = f(P_3) = -\frac{7}{2}$, $f(P_4) = -3$,$f(P_5) = 21$ e portanto $P_1$ é mínimo global, $P_5$ é máximo global.

4. Sendo

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\ x^2 + y^2 \leq 4,\ 1 \leq y \leq 2\},$$

calcule:

(a) **(1.5)** A área de $R$.

**Solução:** A área da região é a área de um setor circular de ângulo $\frac{2\pi}{3}$ e raio 2, $A_1 = \frac{2\pi 4}{6} = \frac{4\pi}{3}$, menos a área de um triângulo, $A_2 = \sqrt{3}$. Portanto $A = A_1 - A_2 = \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}$.

(b) **(1.5)** A coordenada $y$ do centróide de $R$.

**Solução:** Integrando $f(x, y) = y$ no setor circular temos

$$I_1 = \int_{\theta=\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \int_{r=0}^{2} r\sin(\theta) \cdot r dr d\theta = \frac{8\sqrt{3}}{3}.$$

Integrando no triângulo temos

$$I_2 = \int_{y=0}^{1} \int_{x=-\sqrt{3}y}^{\sqrt{3}y} y dx dy = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

Portanto $I = I_1 - I_2 = 2\sqrt{3}$. Segue que

$$\overline{z} = \frac{6\sqrt{3}}{4\pi - 3\sqrt{3}}.$$