P4 de Cálculo de Várias Variáveis I
MAT 1162 — 2009.1
Data: 01 de julho de 2009

1. Considere $g(x, y) = x^5 + 3xy^3 + 2x^2y^2$ e $(x_0, y_0) = (-1, 1)$.

   (a) (1.0) Encontre a equação do plano tangente ao gráfico de g no ponto $(x_0, y_0, g(x_0, y_0))$.

   Solução: Temos que $g(-1, 1) = -2$ e $\nabla g(-1, 1) = (4, -5)$. A equação do plano tangente é

   $$z = -2 + 4(x + 1) - 5(y - 1).$$

   (b) (1.0) Encontre a equação da reta tangente à curva de nível de g que passa por (x_0, y_0).

   Solução: A equação da reta tangente é obtida da equação do plano tangente igualando z a $g(-1, 1)$. Temos

   $$4(x + 1) - 5(y - 1) = 0.$$

   (c) (1.0) Qual a derivada direcional de g em (x_0, y_0) na direção do vetor $v = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$?

   Solução: Temos que

   $$\frac{\partial g}{\partial v}(-1, 1) = \nabla g(-1, 1) \cdot v = (4, -5) \cdot (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{4 - 5\sqrt{3}}{2}.$$

   .

   (d) (1.0) Encontre uma parametrização para a curva interseção do gráfico de g com o plano $y - 1 = \sqrt{3}(x + 1)$.

   Solução: Podemos escolher $x(t) = -1 + t$ e então teremos $y(t) = \sqrt{3}t + 1$ e $z(t) = (t - 1)^5 + 3(t - 1)(1 + \sqrt{3}t)^3 + 2(t - 1)^2(1 + \sqrt{3}t)^2$.

2. Considere $f(x, y) = [x(x - 1)]^2 + y^2$.

   (a) (1.0) Encontre os pontos críticos de f.

   Solução: Temos que $\nabla(f)(x, y) = (2x(x - 1)(2x - 1), 2y)$. Portanto os pontos críticos são $P_1 = (0, 0)$, $P_2 = (\frac{1}{2}, 0)$ e $P_3 = (1, 0)$.

   (b) (1.0) Calcule a matriz hessiana em cada um destes pontos críticos.

   Solução: Temos que

   $$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2(x - 1)(2x - 1) + 2x(2x - 1) + 4x(x - 1);\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2;\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0.$$

   Logo

   $$D^2(f)(0, 0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix};\quad D^2(f)(\frac{1}{2}, 0) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix};\quad D^2(f)(1, 0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

   (c) (1.0) Quais são os máximos e mínimos locais da função? Existem pontos de sela?

   Solução: Como os autovalores da hessiana em P_1 e P_3 são positivos, estes pontos são mínimos locais. Já a hessiana em P_2 tem um autovalor positivo e outro negativo, portanto P_2 é ponto de sela.

3. Considere a integral dupla

$$I = \int\int_R x^3 \; dxdy.$$

onde $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\; x^2 + y^2 \leq 1,\; x \geq 0\}$.

(a) (1.0) Escreva I como integral iterada, integrando primeiro em x e depois em y.

Solução: R é um semi disco e

$$\int\int_R x^3 dxdy = \int_{y=-1}^{1} \int_{x=0}^{\sqrt{1-y^2}} x^3 dxdy.$$

(b) (1.0) Escreva I como integral iterada utilizando coordenadas polares.

Solução:

$$I = \int_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{r=0}^{1} r^4 \cos^3(\theta) dr d\theta.$$

(c) (1.0) Calcule o valor de I.

Solução: Utilizando o item (a),

$$I = \frac{1}{4} \int_{y=-1}^{1} (1-y^2)^2 dy = \frac{4}{15}.$$