Gabarito P3 2010.2 MAT1158 - Cálculo B

Marcelo Coelho Martins - PUC Que Pariu!

26 de Janeiro, 2014

1

A.

$$\sqrt{x} = u \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{dx} = \frac{1}{2u}$$

$$\int_0^\infty \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \cdot dx \; = \; 2\int_0^\infty e^{-u}.du \; = \; -2$$

B. Antes de resolvermos a integral, iremos simplificar a expressão:

$$\frac{2x-2}{x^2-4} \; = \; \frac{2x-2}{(x-2)(x+2)}$$

$$\frac{2x}{(x-2)(x+2)} - \frac{2}{(x-2)(x+2)}$$

Sabemos que $2x = (x+2) + (x-2)$ e que $2 = \frac{(x+2)-(x-2)}{2}$, então vamos substituir essas duas expressões para simplificarmos ainda mais:

$$\frac{x+2}{(x-2)(x+2)} + \frac{x-2}{(x-2)(x+2)} - \frac{(x+2)}{2(x-2)(x+2)} + \frac{x-2}{2(x-2)(x+2)}$$

$$\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x+2} - \frac{1}{2(x-2)} + \frac{1}{2(x+2)}$$

$$\frac{1}{2(x-2)} + \frac{3}{2(x+2)}$$

Logo:

$$\int \frac{2x-2}{x^2-4} \cdot dx \; = \; \frac{1}{2}\int \frac{1}{x-2} \cdot dx + \frac{3}{2}\int \frac{1}{x+2} \cdot dx =$$

$$\frac{1}{2}\ln(x-2) + \frac{3}{2}\ln(x+2) + c$$

C. Essa questão é um tanto quanto problemática. A integral em si é fácil de se resolver, porém os limites de integração a tornam literalmente impossível. Isso porque a primitiva da função que está sendo integrada possui uma assíntota vertical em $x = 1$, ou seja, não existe imagem neste ponto. De qualquer forma, iremos resolver a integral indefinida:

$$x - 1 = u \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{dx} = 1$$

$$\int \frac{1}{(x-1)^2} \cdot dx = \int \frac{1}{u^2} \cdot du$$

$$\int u^{-2}.du \;=\; \frac{u^{-1}}{-1} \;=\; \frac{1}{1-x} + c$$

Percebam que, se "jogarmos" o valor de $x = 1$, teremos uma divisão por 0!

D. Essa questão consiste na utilização do método de integração por partes duas vezes, porém com uma substituição trigonométrica no início:

$$x = 4\sin(\theta) \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{d\theta} = 4\cos(\theta)$$

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{16 - x^2}} \cdot dx = \int 64\sin^3(\theta).d\theta$$

$$64\int \underbrace{\sin(\theta)}_{f'}.\underbrace{\sin^2(\theta)}_{g}.d\theta =$$

$$64(-\cos(\theta).\sin^2(\theta) + \underbrace{2\int \overbrace{\sin(\theta)}^{u'}.\overbrace{\cos^2(\theta)}^{v}.d\theta)}_{2I}$$

$$2I = 2(-\cos(\theta).\cos^2(\theta) - \int -2\sin(\theta).\cos(\theta).(-\cos(\theta)).d\theta)$$

$$2I = -2\cos^3(\theta) - 4I$$

$$2I = -\frac{2}{3}\cos^3(\theta)$$

$$\int 64\sin^3(\theta).d\theta = 64(-\cos(\theta).\sin^2(\theta) - \frac{2}{3}\cos^3(\theta))$$

$$\sin(\theta) = \frac{x}{4} \qquad \cos(\theta) = \sqrt{1 - \frac{x^2}{16}}$$

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{16 - x^2}} \cdot dx = -x^2(16 - x^2)^{1/2} - \frac{2}{3}(16 - x^2)^{3/2}$$

E.

$$\int \underbrace{\cos(2x)}_{f'} . \underbrace{x}_{g} .dx \; = \; x.\sin(x).\cos(x) - \int \sin(x).\cos(x).dx =$$

$$x.\sin(x).\cos(x) + \frac{1}{2}\int -\sin(2x).dx$$

$$x.\sin(x).\cos(x) + \frac{1}{4}\int -\sin(u).du$$

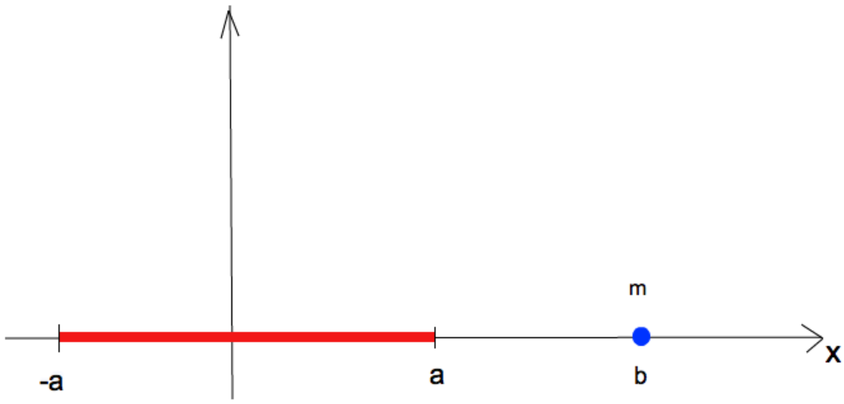
$$x.\sin(x).\cos(x) + \frac{1}{4}\cos(2x) + c$$

F.

$$\cos(x) = u \quad \Rightarrow \quad du = -\sin(x).dx$$

$$-\int \frac{1}{u^3}.du \;=\; -\frac{1}{-2u^2} \;=\; \frac{1}{2}\sec^2(x)$$

2



Sabemos que a densidade linear de um objeto é a derivada de sua massa em relação ao comprimento, logo temos a seguinte relação:

$$p(x) = \frac{dM}{dx}$$

$$dM = x^2.dx$$

Para calcularmos o efeito total da barra sobre a massa m, devemos efetuar a integral de cada pequena parcela de força dF gerada por cada parcela infinitesimal da barra, dM:

$$dF = \frac{G.dM.m}{(b-x)^2}$$

$$F = G.m \int_{-a}^{a} \frac{x^2}{(b-x)^2} \cdot dx$$

$$b - x = u \quad \Rightarrow \quad du = -dx$$

$$x^2 = u^2 - 2bu + b^2$$

$$\int \frac{x^2}{(b-x)^2} \cdot dx = -\left(\int \frac{u^2 - 2bu + b^2}{u^2} \cdot du \right)$$

$$\int \frac{x^2}{(b-x)^2} \cdot dx = -\left(\int 1.du - \int \frac{2b}{u} \cdot du + b^2 . \int u^{-2}.du \right)$$

$$F = -G.m\left(u - 2b.\ln(u) - \frac{b^2}{u}\right)$$

$$F = -G.m\left((b-x) - 2b.\ln(b-x) - \frac{b^2}{b-x}\right)_{-a}^{a}$$

$$F = -G.m\left(-2a - 2b.\ln\left(\frac{b-a}{b+a}\right) - \frac{2ab^2}{a^2-b^2}\right)$$

3

A.

$$\frac{dP(t)}{dt} = -k.\sqrt{P(t)}$$

$$\frac{dP(t)}{\sqrt{P(t)}} = -k.dt$$

$$\int P(t)^{-\frac{1}{2}}.dP(t) = -kt + c$$

$$2\sqrt{P(t)} = -kt + c$$

$$P(t) = \frac{1}{4}(-kt+c)^2$$

B.

$$P(0) = 900 \quad \Rightarrow \quad 900 = \frac{1}{4}c^2$$

$$c = 60$$

$$P(6) = 441 \quad \Rightarrow \quad 441 = \frac{1}{4}(-6k+60)^2$$

$$441 = 9(10-k^2)$$

$$49 = (10-k)^2$$

$$10 - k = \pm 7$$

$$k_1 = 3 \quad k_2 = 17$$

Para determinarmos o tempo que a espécie leva para se extinguir, devemos supor $P(t) = 0$ para ambos os casos.

$$\frac{1}{4}(-kt + 60)^2 = 0$$
$$-kt + 60 = 0$$
$$t = \frac{60}{k}$$
$$t_1 = 20 \quad t_2 = \frac{60}{17}$$

C.

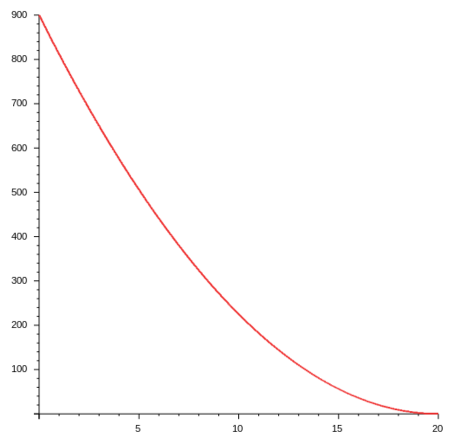


Figure 1: $P(t) = \frac{1}{4}(-3t + 60)^2$

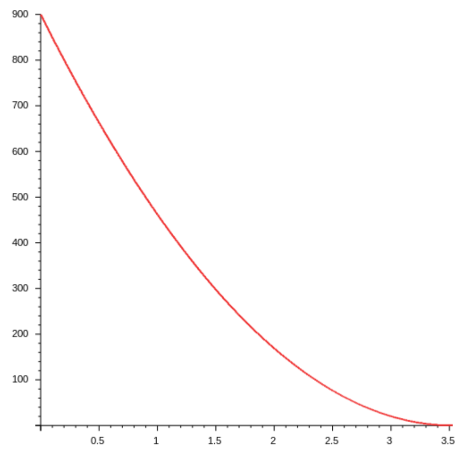


Figure 2: $P(t) = \frac{1}{4}(-17t + 60)^2$

PUC
QUE PARIU!