G4 de Álgebra Linear I – 2013-2

Gabarito

6 de Dezembro de 2013

---

1) Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por:

$$T(\vec{v}) = \big(\vec{v} \times (1,1,1)\big) \times (0,1,1).$$

a) Determine a matriz $[T]_\varepsilon$ da transformação linear T na base canônica.

b) Determine uma base ortonormal η da imagem de T. Lembre que:

$$\text{imagem}(T) = \{\vec{w} \in \mathbb{R}^3 \text{ tal que existe } \vec{v} \in \mathbb{R}^3 \text{ tal que } T(\vec{v}) = \vec{w}\}.$$

c) Considere a base

$$\gamma = \{(1,1,1)\,, (1,-1,2)\,, (6,0,0)\}\,.$$

Determine a matriz $[T]_\gamma$ da transformação linear T na base γ.

d) Considere o plano de equação cartesiana

$$\rho\colon\, y = 0.$$

Determine uma base da imagem $T(\rho)$ de ρ pela transformação T.

Resposta:

a) Calculamos as imagens dos vetores da base canônica:

$$\begin{aligned}
T(\vec{i}) &= \big((1,0,0) \times \big(1,1,1)\big) \times (0,1,1) = (0,-1,1) \times (0,1,1) = (-2,0,0),\\
T(\vec{j}) &= \big((0,1,0) \times \big(1,1,1)\big) \times (0,1,1) = (1,0,-1) \times (0,1,1) = (1,-1,1),\\
T(\vec{k}) &= \big((0,0,1) \times \big((1,1,1)\big) \times (0,1,1) = (1,-1,0) \times (0,1,1) = (1,1,-1).
\end{aligned}$$

Portanto:

$$[T]_\varepsilon = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

b) A imagem de T é gerada pelas imagens dos vetores $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, isto é, pelos vetores

$$T(\vec{i}) = (-2,0,0), \quad T(\vec{j}) = (1,-1,1), \quad T(\vec{k}) = (1,1,-1).$$

Estes vetores não são paralelos, mas pela definição de T sabemos que todos são ortogonais a $(0,1,1)$, e portanto estão no plano $y+z=0$. Como os vetores $T(\vec{i}) = (-2,0,0)$ e $T(\vec{j}) = (1,-1,1)$ não são paralelos, eles geram esse plano. Portanto, imagem de T é o plano

$$\pi : y+z=0.$$

Para encontrar uma base ortonormal η do plano π escolhemos um vetor do plano π, por exemplo, $\vec{v} = (1,0,0)$, e fazemos o produto vetorial com o vetor normal do plano $\vec{n}_\pi = (0,1,1)$. Portanto,

$$\vec{w} = (1,0,0) \times (0,1,1) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (0,-1,1).$$

Logo temos a base ortogonal ξ,

$$\xi = \left\{ \Big(1,0,0\Big), \Big(0,-1,1\Big) \right\}.$$

Normalizando estes vetores temos a base ortonormal:

$$\eta = \left\{ \Big(1,0,0\Big), \Big(0, \frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\Big) \right\}$$

c) Calculamos as imagens dos vetores da base:

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Escrevemos esse vetores na base γ:

$$(0,0,0) = a\,(1,1,1) + b\,(1,-1,2) + c\,(6,0,0),$$

logo

$$(0,0,0)_\gamma = (0,0,0),$$

$$(-1,3,-3) = a\,(1,1,1) + b\,(1,-1,2) + c\,(6,0,0),$$

logo

$$(-1,3,-3)_\gamma = (1,-2,0),$$

e

$$(-12,0,0) = a\,(1,1,1) + b\,(1,-1,2) + c\,(6,0,0).$$

logo

$$(-12,0,0)_\gamma = (0,0,-2).$$

Assim a matriz de T na base γ é:

$$[T]_\gamma = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

d) Uma base do plano é formada (por exemplo) pelos vetores $(1,0,1)$ e $(1,0,0)$. Calculamos as imagens desses vetores:

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Logo a imagem do plano ρ é outro plano. Como este plano está contido na imagem de T coincide necessariamente com a imagem de T. Uma base desta imagem é, por exemplo,

$$\{(0,-3,3),(1,1,-1)\}.$$

---

2) Considere as bases de $\mathbb{R}^2$

$$\gamma = \{(-1,1),(-1,0)\} \quad \text{e} \quad \sigma = \{(0,1),(-1,-1)\}$$

e a transformação linear $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ cuja matriz na base γ é

$$[T]_\gamma = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Determine **explicitamente** as matrizes de mudança de base da base γ para a base σ e da base σ para a base γ.

b) Determine **explicitamente** a matriz $[T]_\sigma$ da transformação linear T na base σ.

c) Escreva, se possível, uma forma diagonal de T.

d) Considere a matriz

$$[M] = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sabendo que a matriz $[M]$ admite uma base ortonormal de autovetores e que o seu determinante é 0, determine os valores de a, b e c

---

Resposta:

a) Temos que a matriz da transformação linear T na base canônica é:

$$[T]_\varepsilon = P\,[T]_\gamma\,P^{-1},$$

onde P é a matriz formada pelos vetores da base γ.

$$P = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Com a sua inversa:

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Temos também que

$$[T]_\varepsilon = S\,[T]_\sigma\,S^{-1},$$

onde S é a matriz formada pelos vetores da base σ.

$$S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Com sua inversa

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Igualando as expressões de $[T]_\varepsilon$ acima obtemos

$$S\,[T]_\sigma\,S^{-1} = P\,[T]_\gamma\,P^{-1}, \qquad [T]_\sigma = S^{-1}\,P\,[T]_\gamma\,P^{-1}\,S.$$

Assim, a matriz de mudança de base da base σ para a base γ é

$$P^{-1}\,S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

E a matriz de mudança de base da base γ para a base σ é:

$$S^{-1}\,P = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Pelo item anterior temos que

$$[T]_\sigma = S^{-1}\,P\,[T]_\gamma\,P^{-1}\,S.$$

Então,

$$[T]_\sigma = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & -17 \\ 7 & -10 \end{pmatrix}.$$

c) As matrizes $[T]_\sigma$, $[T]_\varepsilon$ e $[T]_\gamma$ são semelhantes, logo todas têm os mesmos autovalores e a mesma forma diagonal (se existir) Logo podemos achar os autovalores de $[T]_\gamma$. Usando o traço e o determinante de $[T]_\gamma$ achamos o polinômio característico:

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 2\,\lambda - 1$$

As raízes de $p(\lambda)$ são os autovalores. Assim fazendo $p(\lambda) = 0$, temos:

$$\lambda_1 = (1+\sqrt{2}) \quad \text{e} \quad \lambda_2 = (1-\sqrt{2}).$$

Autovalores reais e distintos garantem que a transformação é diagonalizável. E uma forma diagonal de T pode ser:

$$D = \begin{pmatrix} (1+\sqrt{2}) & 0 \\ 0 & (1-\sqrt{2}) \end{pmatrix}.$$

d) A matriz $[M]$ é uma matriz simétrica pois tem uma base ortogonal de autovetores. Portanto, $b = 2$ e $c = 0$,

$$M = \begin{pmatrix} a & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

O determinante da matriz é zero logo

$$\det[M] = 2a - 4 = 0.$$

Então $a = 2$. Portanto,

$$a = 2, \quad b = 2 \quad \text{e} \quad c = 0.$$

---

3) Considere a reta r em $\mathbb{R}^3$ de equação paramétrica

$$(t, t, -2t), \quad t \in \mathbb{R}$$

e a transformação linear $E\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ espelhamento em relação a reta r.

a) Encontre uma base ortonormal β de $\mathbb{R}^3$ formada por autovetores de E, e determine os respectivos autovalores.

b) Determine a matriz $[E]_\beta$ da transformação linear E na base β.

c) Determine a matriz $[E]_\varepsilon$ da transformação linear E na base canônica de $\mathbb{R}^3$.

d) Determine **explicitamente** as matrizes

$$[E]_{\varepsilon}^{400} \quad \text{e} \quad [E]_{\varepsilon}^{401}.$$

Resposta:

a) Lembre que o espelhamento é definido da seguinte forma,

- $T(\bar{u}) = \bar{u}$ se $\bar{u}$ pertence a reta r e
- $T(\bar{w}) = -\bar{w}$ se $\bar{w}$ é perpendicular a reta r.

Portanto, -1 e 1 são autovalores. Um autovetor associado 1 é $(1, 1, -2)$ (que é o vetor diretor da reta). Também temos que -1 é um autovalor e os vetores do plano $\pi : x + y - 2z = 0$ não nulos são seus autovetores. Assim, $(1, -1, 0)$ é um autovetor e outro autovetor é

$$\bar{u} = (1, 1, -2) \times (1, -1, 0) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (-2, -2, -2).$$

Dividindo por -2 obtemos $(1, 1, 1)$ que é outro autovetor associado a -1.

Uma base ortonormal β formada por autovetores de T é

$$\beta = \left\{ \left(1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}, -2/\sqrt{6}\right), \left(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0\right), \left(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}\right) \right\}.$$

O primeiro autovetor tem autovalor associado 1 e os outros autovetores têm autovalor -1.

b) A matriz $[E]_\beta$ é uma matriz diagonal (pois a base β é formada por autovetores) e sua diagonal principal é pelos autovalores correspondentes (respeitando a ordem). Logo:

$$[E]_\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

c) Temos que:

$$[E]_\varepsilon = [S]\, [E]_\beta\, [S]^{-1},$$

onde S é a matriz ortogonal formada pelos vetores da base β do item anterior. Portanto,

$$\begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \\ -2/\sqrt{6} & 0 & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \\ -2/\sqrt{6} & 0 & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -4/6 & 2/6 & -4/6 \\ 2/6 & -4/6 & -4/6 \\ -4/6 & -4/6 & 2/6 \end{pmatrix}.$$

d) Lembre que (pelo item anterior)

$$[E]_\varepsilon = [S][D][S]^{-1}, \quad [D] = [E]_\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Assim

$$[D]^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Portanto, quando n é par $[D]^n$ é a matriz identidade e quando $n = 2m + 1$ é impar

$$[D]^n = [D]^{2m}[D] = [D].$$

Então

$$[E]_\varepsilon^{400} = [S][D^{400}][S^{-1}] = Id$$

e

$$[E]_\varepsilon^{401} = [S][D^{401}][S]^{-1} = [S][D][S]^{-1} = [E].$$