G2 de Álgebra Linear I – 2013.2

18 de outubro de 2013.

Nome: ______________________________ Matrícula: __________
Assinatura: ____________________________ Turma: __________

Preencha CORRETA e COMPLETAMENTE todos os campos (nome, matrícula, assinatura e turma).

Provas sem nome não serão corrigidas e terão nota ZERO. Provas com os campos matrícula, assinatura e turma não preenchidos ou preenchidos de forma errada serão penalizadas com a perda de 1 ponto por campo.

Duração: 1 hora 50 minutos

Ques.	**1.a**	**1.b**	**1.c**	**2.a**	**2.b**	**2.c**	**2.d**	**2.e**	**3**	**soma**
Valor	2.0	2.0	0.5	0.5	1.5	1.0	0.5	1.0	1.0	10.0
Nota										

Instruções – leia atentamente

- Não é permitido usar calculadora. Mantenha o celular desligado.
- É proibido desgrampear a prova. Prova com folhas faltando terá nota zero.
- O desenvolvimento de cada questão deve estar a seguir **Resposta**. Desenvolvimentos fora do lugar (p. ex. no meio dos enunciados, nas margens, etc) **não serão corrigidos!!**.
- Escreva de forma clara e legível. Justifique de forma **ordenada** e **cuidadosa** suas respostas. Respostas sem justificativa não serão consideradas.

Observação

justificar: *Legitimar. Dar razão a. Provar a boa razão do seu procedimento.*

cuidado: *Atenção, cautela, desvelo, zelo.* **cuidadoso:** *Quem tem ou denota cuidado.* fonte: mini-Aurélio

1) Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por:

$$\begin{aligned} T(1,1,1) &= (0,0,2), \\ T(1,1,0) &= (0,1,1), \\ T(1,0,0) &= (1,0,1), \end{aligned}$$

e a transformação linear $E : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ espelhamento em relação ao plano que contém a origem e é paralelo aos vetores $\{(1,0,-1),(1,0,1)\}$.

(a) Determine as matrizes $[T]$, $[E]$ e $[E \circ T]$ das transformações lineares T, E e $E \circ T$ na base canônica, respectivamente.

(b) Considere o plano π cuja equação cartesiana é $x = 0$ e o subespaço $\mathbb{V}$ definido como a imagem de π pela transformação linear $E \circ T$, isto é, $\mathbb{V} = E \circ T(\pi)$.

Verifique que

$$G = \{(-1,0,1),(1,2,1),(0,2,2)\}$$

é um conjunto gerador do subespaço $\mathbb{V}$.

Encontre uma base β de $\mathbb{V}$ formada por vetores do conjunto G.

Determine as coordenadas do vetor $(1,4,3) \in \mathbb{V}$ na base β.

(c) Determine, se possível, um vetor $\vec{u}$ tal que $T^{-1}(\vec{u}) = (3,0,0)$. Justifique cuidadosamente.

Lembre que a imagem de um subespaço $\mathbb{W}$ de $\mathbb{R}^3$ por uma transformação linear $L \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ é o subespaço

$$L(\mathbb{W}) = \{\vec{u} \in \mathbb{R}^3 \text{ tal que existe } \vec{w} \in \mathbb{W} \text{ tal que } T(\vec{w}) = \vec{u}\}.$$

Resposta:

2) Considere as transformações lineares

$$S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \qquad T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \quad \text{e} \qquad Z : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

cujas matrizes na base canônica são, respectivamente,

$$[S] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad [T] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad [Z] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(a) Encontre a forma geral da transformação S, isto é, $S(x, y, z)$.

(b) Considere os subespaços de $\mathbb{R}^3$ definidos por

- $\mathbb{W} = \{\vec{w} \in \mathbb{R}^3$ tais que $S(\vec{w}) = \vec{0}\}$,
- $\mathbb{U} = \{\vec{u} \in \mathbb{R}^3$ tais que $T(\vec{u}) = \vec{0}\}$ e
- $\mathbb{N} = \{\vec{n} \in \mathbb{R}^3$ tais que $Z(\vec{n}) = \vec{0}\}$.

Determine uma base ortogonal β de $\mathbb{W}$, uma base ortogonal γ de $\mathbb{U}$ e uma base ortogonal η de $\mathbb{N}$.

(c) Decida se a transformação linear S é sobrejetora.

(d) Encontre dois vetores distintos $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$ tais que $S(\vec{u}) = S(\vec{v})$.

(e) Determine a equação paramétrica de um plano π tal que $S(\pi)$ (a imagem de π pela transformação S) seja a reta r de equações paramétricas

$$r\colon (t, -t, 0),\ t \in \mathbb{R}.$$

Resposta:

3) Considere o plano

$$\pi : x + y + z = 1.$$

Determine uma equação cartesiana de um plano ρ tal que a distância entre os planos π e ρ seja $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Resposta: