P1 de Álgebra Linear I – 2009.1

27 de Março de 2009.

Gabarito

Questão 1)

Considere o vetor $\overrightarrow{v} = (1, 2, -1)$ e os pontos $A = (1, 2, 1)$, $B = (2, 1, 0)$ e $C = (0, 1, -2)$ de $\mathbb{R}^3$.

a) Determine, se possível, vetores unitários $\overrightarrow{w}$ e $\overrightarrow{u}$ paralelos ao vetor $\overrightarrow{v}$ tais que

$$\overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{u} = -1.$$

Caso não seja possível escreva: IMPOSSÍVEL.

b) Determine EXPLICITAMENTE pontos D_1, D_2 e D_3, diferentes entre si,

$$D_1 \neq D_2 \neq D_3 \neq D_1,$$

tais que os pontos A, B, C, D_i determinem um paralelogramo Δ_i, $i = 1, 2, 3$.

c) Determine as áreas de TODOS os paralelogramos $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ do item anterior.

Respostas:

(a) O módulo do vetor $\overrightarrow{v} = (1, 2, -1)$ é

$$||\overrightarrow{v}|| = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{6}.$$

Portanto, os vetores unitários paralelos a $\overrightarrow{v}$ são

$$\overrightarrow{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 2, -1) \quad \text{e} \quad \overrightarrow{v}_2 = -\frac{1}{\sqrt{6}}(1, 2, -1).$$

Observe que se escolhemos $\overrightarrow{w}$ e $\overrightarrow{u}$ iguais obtemos $\overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{u} = 1$. Logo as únicas possibilidade para a escolha dos vetores $\overrightarrow{w}$ e $\overrightarrow{u}$ são

$$\overrightarrow{w} = \frac{1}{\sqrt{6}}\,(1,2,-1) \quad \text{e} \quad \overrightarrow{u} = -\frac{1}{\sqrt{6}}\,(1,2,-1),$$

e vice-versa. Nesses casos o ângulo entre os vetores é π, logo

$$\overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{u} = ||\overrightarrow{w}||\,||\overrightarrow{u}||\cos\pi = (1)\,(1)\,(-1) = -1.$$

Obviamente, v. também pode calcular diretamente o produto escalar entre os vetores $\bar{w}$ e $\bar{u}$.

(b) Existem três possibilidades de paralelogramos com vértices A, B, C, dependendo da escolha dos lados do mesmo (faça uma figura):

1. os segmentos AB e AC são lados do paralelogramo,
2. os segmentos BA e BC são lados do paralelogramo,
3. os segmentos CA e CB são lados do paralelogramo.

Consideramos os vetores

$$\overrightarrow{AB} = (1,-1,-1), \quad \overrightarrow{AC} = (-1,-1,-3), \quad \overrightarrow{BC} = (-2,0,-2).$$

Seja $D = (x,y,z)$ o quarto vértice do paralelogramo. No primeiro caso temos

$$\overrightarrow{AD} = (x-1, y-2, z-1) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = (0,-2,-4).$$

Portanto

$$x = 1, \quad y = 0, \quad z = -3, \qquad D = (1,0,-3).$$

Racicinando de forma similar, no segundo caso temos

$$\overrightarrow{BD} = (x-2, y-1, z-0) = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = (-3,1,-1).$$

Portanto

$$x = -1, \quad y = 2, \quad z = -1, \qquad D = (-1,2,-1).$$

No terceiro (e último) caso temos

$$\overrightarrow{CD} = (x-0, y-1, z+2) = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} = (3,1,5).$$

Portanto
$$x = 3, \quad y = 2, \quad z = 3, \qquad D = (3, 2, 3).$$
Assim, temos as seguintes possibilidades para os vértices dos paralelogramos:
$$D_1 = (1, 0, -3), \quad D_2 = (-1, 2, -1), \quad D_3 = (3, 2, 3).$$

(c) Obeservamos que todos os paralelogramos considerados têm a mesma área. Portanto, é suficiente calcular a área do primeiro deles. Por exemplo, para ver esta afirmação para os paralelogramos Δ_1 e Δ_2, v. pode usar um pouco de geometria elementar ou usar o producto vetorial. Observe que
$$\text{área}(\Delta_1) = ||\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}||, \qquad \text{área}(\Delta_2) = ||\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC}||.$$
Note que, pelas propriedades do produto vetorial,
$$\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} \times (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{AC} = -(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}).$$
Logo
$$\text{área}(\Delta_1) = ||\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|| = ||\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC}|| = \text{área}(\Delta_2).$$
Calcularemos agora a área de Δ_1:
$$\begin{aligned} \text{área}(\Delta_1) &= ||\overrightarrow{AB} \times AC|| = ||(1, -1, -1) \times (-1, -1, -3)|| = \\ &= ||(1, -1, -1) \times (1, 1, 3)||. \end{aligned}$$
Temos
$$(1, -1, -1) \times (1, 1, 3) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = (-2, -4, 2).$$
Portanto,
$$\text{área}(\Delta_1) = ||(2, 4, -2)|| = \sqrt{4 + 16 + 4} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}.$$

Respostas

(a)

Prova A:

$$\frac{1}{\sqrt{6}}\,(1,2,-1), \qquad -\frac{1}{\sqrt{6}}\,(1,2,-1).$$

Prova B:

$$\frac{1}{\sqrt{6}}\,(2,1,-1), \qquad -\frac{1}{\sqrt{6}}\,(2,1,-1).$$

Prova C:

$$\frac{1}{\sqrt{6}}\,(1,-1,2), \qquad -\frac{1}{\sqrt{6}}\,(1,-1,2).$$

Prova D:

$$\frac{1}{\sqrt{6}}\,(-1,2,1), \qquad -\frac{1}{\sqrt{6}}\,(-1,2,1).$$

(b)

Prova A:

$$D_1 = (1,0,-3), \quad D_2 = (-1,2,-1), \quad D_3 = (3,2,3).$$

Prova B:

$$D_1 = (0,1,-3), \quad D_2 = (2,-1,-1), \quad D_3 = (2,3,3).$$

Prova C:

$$D_1 = (1,-3,0), \quad D_2 = (-1,-1,2), \quad D_3 = (3,3,2).$$

Prova D:

$$D_1 = (-3,0,1), \quad D_2 = (-1,2,-1), \quad D_3 = (3,2,3).$$

(c)

Todas as provas:

$$\text{área}(\Delta_1) = \text{área}(\Delta_3) = \text{área}(\Delta_3) = 2\sqrt{6}.$$

Questão 2)

Considere o vetor $\overrightarrow{v} = (1,2,3)$ e os pontos $P = (1,2,0)$ e $Q = (2,2,1)$ de $\mathbb{R}^3$. Determine:

a) O vetor $\overrightarrow{w}$ projeção ortogonal do vetor $\overrightarrow{a} = (1,0,2)$ sobre o vetor $\overrightarrow{v}$.

b) O valor de α para que a projeção ortogonal do vetor $(\alpha,1,0)$ no vetor $\overrightarrow{v}$ seja o vetor $(2,4,6) = 2\,\overrightarrow{v}$.

c) Um ponto B da reta

$$r\colon (1+t, 2-t, 2\,t), t \quad \in \mathbb{R}$$

tal que a área do triângulo Δ de vértices P, Q e B seja 2.

Respostas:

(a) Temos que vetor projeção ortogonal do vetor $\overrightarrow{a} = (1,0,2)$ sobre o vetor $\overrightarrow{v} = (1,2,3)$ é

$$\overrightarrow{w} = \frac{\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{v}}{\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{v}}\,\overrightarrow{v} = \frac{(1,0,2)\cdot(1,2,3)}{(1,2,3)\cdot(1,2,3)}\,(1,2,3) = \frac{7}{14}\,(1,2,3).$$

Portanto,

$$\overrightarrow{w} = \frac{1}{2}\,(1,2,3) = (1/2, 1, 3/2).$$

(b) Devemos ter

$$\frac{(\alpha,1,0)\cdot(1,2,3)}{(1,2,3)\cdot(1,2,3)}\,(1,2,3) = \frac{\alpha+2}{14}\,(1,2,3) = 2\,(1,2,3) = (2,4,6).$$

Portanto

$$\frac{\alpha+2}{14} = 2, \quad \alpha+2 = 28, \quad \alpha = 26.$$

(c) O ponto B da reta r deve verificar

$$\frac{||\overrightarrow{BP}\times\overrightarrow{PQ}||}{2} = 2, \qquad ||\overrightarrow{BP}\times\overrightarrow{PQ}|| = 4.$$

Note que
$$\overrightarrow{PQ} = (1,0,1)$$
e que se B pertence à reta r então
$$\overrightarrow{PB} = (t,-t,2\,t).$$
Portanto, devemos achar t tal que
$$||(1,0,1)\times(t,-t,2\,t)|| = (|t|)\,(||(1,0,1)\times(1,-1,2)||) = 4.$$
Temos
$$(1,0,1)\times(1,-1,2) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = (1,-1,-1).$$
Logo
$$||(1,0,1)\times(1,-1,-1)|| = \sqrt{3}.$$
Portanto,
$$|t| = \frac{4}{\sqrt{3}}, \quad t = \pm\frac{4}{\sqrt{3}}.$$
Assim
$$B = \left(1+\frac{4}{\sqrt{3}}, 2-\frac{4}{\sqrt{3}}, 2\,\frac{4}{\sqrt{3}}\right) \quad \text{ou} \quad B = \left(1-\frac{4}{\sqrt{3}}, 2+\frac{4}{\sqrt{3}}, -2\,\frac{4}{\sqrt{3}}\right).$$

Respostas

(a)

Prova A: $\overrightarrow{w} = \dfrac{1}{2}\,(1,2,3) = (1/2,1,3/2).$

Prova B: $\overrightarrow{w} = \dfrac{1}{2}\,(2,1,3) = (1,1/2,3/2).$

Prova C: $\overrightarrow{w} = \dfrac{1}{2}\,(1,3,2) = (1/2,3/2,1).$

Prova D: $\overrightarrow{w} = \dfrac{1}{2}\,(3,2,1) = (3/2,1,1/2).$

(b)

todas as provas: $\alpha = 26$.

(c)

Prova A:

$$B = \left(1 + \frac{4}{\sqrt{3}}, 2 - \frac{4}{\sqrt{3}}, 2\,\frac{4}{\sqrt{3}}\right), \quad B = \left(1 - \frac{4}{\sqrt{3}}, 2 + \frac{4}{\sqrt{3}}, -2\,\frac{4}{\sqrt{3}}\right).$$

Prova B:

$$B = \left(2 - \frac{4}{\sqrt{3}}, 1 + \frac{4}{\sqrt{3}}, 2\,\frac{4}{\sqrt{3}}\right), \quad B = \left(2 + \frac{4}{\sqrt{3}}, 1 - \frac{4}{\sqrt{3}}, -2\,\frac{4}{\sqrt{3}}\right).$$

Prova C:

$$B = \left(1 + \frac{4}{\sqrt{3}}, 2\,\frac{4}{\sqrt{3}}, 2 - \frac{4}{\sqrt{3}}\right), \quad B = \left(1 - \frac{4}{\sqrt{3}}, -2\,\frac{4}{\sqrt{3}}, 2 + \frac{4}{\sqrt{3}}\right).$$

Prova D:

$$B = \left(2\,\frac{4}{\sqrt{3}}, 2 - \frac{4}{\sqrt{3}}, 1 + \frac{4}{\sqrt{3}}\right), \quad B = \left(-2\,\frac{4}{\sqrt{3}}, 2 + \frac{4}{\sqrt{3}}, 1 - \frac{4}{\sqrt{3}}\right).$$

Questão 3)

Considere as retas r_1 e r_2 de $\mathbb{R}^3$ cujas equações paramétricas são

$$r_1\colon (1 + t, 2\,t, 1 - 2\,t), \quad t \in \mathbb{R},$$

$$r_2\colon (-3 + 2\,t, 7 - t, 3 - 2\,t), \quad t \in \mathbb{R},$$

e as reta r_3 de equação cartesiana

$$r_3\colon \begin{cases} x + y + z = 3 \\ x - 2\,y + 2\,z = 1. \end{cases}$$

Determine:

a) O ponto P de interseção das retas r_1 e r_2.

b) A equação cartesiana do plano ϱ que contém as retas r_1 e r_2.

c) Equações paramétricas da reta r_3.

Respostas:

(a) Para calcular o ponto de interseção das retas devemos resolver o sistema (note que os parámetros das duas retas são diferentes, e portanto devemos denominá-los de forma diferente, por exemplo t e s):

$$\begin{aligned} 1+t &= -3+2\,s, \\ 2\,t &= 7-s, \\ 1-2\,t &= 3-2\,s. \end{aligned}$$

Somando a primeira e a última equação obtemos

$$2-t=0, \qquad t=2.$$

A segunda equação fornece $s=3$. Veja que este resultado é compatível com todas as equações.

Substituindo $t=2$ na equação de r_1 ou $s=3$ na equação de r_2, obtemos o ponto de interseção $P=(3,4,-3)$.

(b) Um vetor normal $\overrightarrow{n}$ do plano ϱ é o produto vetorial dos vetores diretores das retas r_1 e r_2. Estes vetores são, respetivamente, $(1,2,-2)$ e $(2,-1,-2)$. Portanto,

$$\overrightarrow{n} = (1,2,-2)\times(2,-1,2) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \end{vmatrix} = (-6,-2,-5).$$

A equação cartesiana de ϱ é da forma,

$$\varrho\colon\, 6\,x+2\,y+5\,z=d.$$

Como o ponto $(3,4,-3)$ pertence ao plano

$$18+8+15=d, \quad d=11.$$

Logo,
$$\varrho\colon 6\,x + 2\,y + 5\,z = 11.$$

(c) Para determinar a equação paramétrica de r_3 dvemos resolver o sistema
$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x - 2\,y + 2\,z = 1. \end{cases}$$
Escalonando,
$$\begin{cases} x \quad +y + z = 3 \\ \quad -3\,y + z = -2. \end{cases}$$
Escolhendo y como parámetro, $y = t$, obtemos
$$z = -2 + 3\,t.$$
Finalmente
$$x = 3 - y - z = 3 - t + 2 - 3\,t = 5 - 4\,t.$$
Logo
$$r_3\colon (5 - 4\,t, t, -2 + 3\,t) \quad t \in \mathbb{R}.$$
Observe que o vetor diretor da reta r_3, $\overrightarrow{v} = (-4, 1, 3)$, é perpendicular aos vetores normais dos planos que definem r_3 (os vetores $(1, 1, 1)$ e $(1 - 2, 2)$).

Respostas

(a)

Prova A: $P = (3, 4, -3)$.

Prova B: $P = (4, 3, -3)$.

Prova C: $P = (3, -3, 4)$.

Prova D: $P = (-3, 4, 3)$.

(b)

Prova A: $\varrho\colon 6\,x + 2\,y + 5\,z = 11$.

Prova B: $\varrho\colon 2\,x + 6\,y + 5\,z = 11$.

Prova C: $\varrho\colon 6\,x + 5\,y + 2\,z = 11$.

Prova D: $\varrho\colon 5\,x + 2\,y + 6\,z = 11.$

(c)

Prova A: $r_3\colon (5 - 4\,t, t, -2 + 3\,t) \quad t \in \mathbb{R}.$
Prova B: $r_3\colon (t, 5 - 4\,t, -2 + 3\,t) \quad t \in \mathbb{R}.$
Prova C: $r_3\colon (5 - 4\,t, -2 + 3\,t, t) \quad t \in \mathbb{R}.$
Prova D: $r_3\colon (-2 + 3\,t, t, 5 - 4\,t) \quad t \in \mathbb{R}.$

Questão 4)

Considere o plano ρ cuja equação cartesiana é

$$\rho\colon x + 2\,y + 3\,z = 6,$$

os pontos $A = (1,1,1), B = (0,0,2) \in \rho$, e a reta r de equação paramétrica

$$r\colon (1 + t, 2\,t, 1 - 2\,t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Determine:

a) O ponto D de interseção da reta r e o plano ρ.

b) Um ponto C do plano ρ tal que os pontos A, B e C formam um triângulo retângulo isósceles cujos catetos são AB e AC.

Respostas:

(a) Para achar D devemos determinar para que valor de t se verifica

$$(1 + t) + 2\,(2\,t) + 3(1 - 2\,t) = 6, \qquad -t + 4 = 6, \qquad t = -2.$$

Logo

$$D = (-1, -4, 5).$$

(b) Observe que o vetor $\overrightarrow{AC}$ deve ser ortogonal ao vetor $\overrightarrow{AB} = (-1,-1,1)$ (o triângulo é retângulo) e ao vetor normal do plano $\overrightarrow{n} = (1,2,3)$ (os pontos A e C pertencem ao plano). Portanto, $\overrightarrow{AC}$ é paralelo a $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{n}$. Temos

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{n} = (-1,-1,1) \times (1,2,3) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = (-5,4,-1).$$

Como o triângulo é isósceles,

$$||\overrightarrow{AC}|| = ||\overrightarrow{AB}|| = \sqrt{3}.$$

Portanto,

$$\overrightarrow{AC} = \pm \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{42}}\,(5,-4,1) = \pm \frac{1}{\sqrt{14}}\,(5,-4,1).$$

Se $C = (x,y,z)$ temos duas possibilidades, no caso $+$,

$$x - 1 = \frac{5}{\sqrt{14}}, \quad y - 1 = \frac{-4}{\sqrt{14}}, \quad z - 1 = \frac{1}{\sqrt{14}},$$

e obtemos

$$C = \left(1 + \frac{5}{\sqrt{14}}, 1 - \frac{4}{\sqrt{14}}, 1 + \frac{1}{\sqrt{14}}\right).$$

No caso $(-)$,

$$x - 1 = \frac{-5}{\sqrt{14}}, \quad y - 1 = \frac{+4}{\sqrt{14}}, \quad z - 1 = \frac{-1}{\sqrt{14}},$$

e obtemos

$$C = \left(1 - \frac{5}{\sqrt{14}}, 1 + \frac{4}{\sqrt{14}}, 1 - \frac{1}{\sqrt{14}}\right).$$

Respostas

(a)

Prova A: $D = (-1,-4,5)$.

Prova B: $D = (-4,-1,5)$.

Prova C: $D = (-1,5,-4)$.

Prova D: $D = (5, -4, -1)$.

(b)

Prova A:

$$C = \left(1 + \frac{5}{\sqrt{14}}, 1 - \frac{4}{\sqrt{14}}, 1 + \frac{1}{\sqrt{14}}\right),$$

$$C = \left(1 - \frac{5}{\sqrt{14}}, 1 + \frac{4}{\sqrt{14}}, 1 - \frac{1}{\sqrt{14}}\right).$$

Prova B:

$$C = \left(1 - \frac{4}{\sqrt{14}}, 1 + \frac{5}{\sqrt{14}}, 1 + \frac{1}{\sqrt{14}}\right),$$

$$C = \left(1 + \frac{4}{\sqrt{14}}, 1 - \frac{5}{\sqrt{14}}, 1 - \frac{1}{\sqrt{14}}\right).$$

Prova C:

$$C = \left(1 + \frac{5}{\sqrt{14}}, 1 + \frac{1}{\sqrt{14}}, 1 - \frac{4}{\sqrt{14}}\right),$$

$$C = \left(1 - \frac{5}{\sqrt{14}}, 1 - \frac{1}{\sqrt{14}}, 1 + \frac{4}{\sqrt{14}}\right).$$

Prova D:

$$C = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{14}}, 1 - \frac{4}{\sqrt{14}}, 1 + \frac{5}{\sqrt{14}}\right),$$

$$C = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{14}} 1 + \frac{4}{\sqrt{14}}, 1 - \frac{5}{\sqrt{14}}\right).$$