P4 de MAT1104 2008.2 1ª parte, sem maple.

1.Seja f(x)= int(sqrt(1+t^4)/t,t=1..x^2).

a) calcule a derivada de f(x).

f(x)=g(h(x)), logo sua derivada é g'(h(x)).h'(x), sendo h(x)=x^2 e g(x)= int(sqrt(1+t^4)/t,t=1..x).

temos h'(x)=2*x e g'(x)= sqrt(1+x^4)/x , logo f'(x)= (sqrt(1+x^4)/x)*2*x= sqrt(1+x^4)*2

b) calcule f'(2)

f'(2)= sqrt(1+2^4)*2=sqrt(17)/2

c)considerando int(sqrt(1+t^4)/t,t=1..4)=7,7 , escreva a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto (2,f(2)).

A equação da reta tangente é y-f(2)=f'(2)=f'(2)*(x-2), e foi dado f(2) e calculado f'(2). A equação fica: y-7,7= (sqrt(17)/2)*(x-2).

2. Considere a função f(x)=x/e^x.

a) determine o seu domínio

o domínio é R, já que o denominador não se anula e a exponencial está definida para todo x.

b) determine assíntotas verticais e horizontais, se existirem.

Assíntota vertical existe quando em algum valor a, o limite da função quando x tende a a é infinito (mais ou menos). Como a função é definida e continua em R , não há assíntota vertical.

Assíntota horizontal existe quando f(x) tem limite finito em menos ou em mais infinito.

Em mais infinito, numerador e denominador vão ao infinito. Usamos a regra de l'hôpital.

Derivando em cima e em baixo, fica 1/e^x. fazendo o limite, obtemos zero. Há uma assíntota horizontal: a reta y=0.

Em menos infinito, o numerador vai a menos infinito e o denominador vai a zero, mantendo-se positivo, logo a fração vai a menos infinito. Não há outra assíntota horizontal.

c)determine máximos e mínimos locais se existirem.

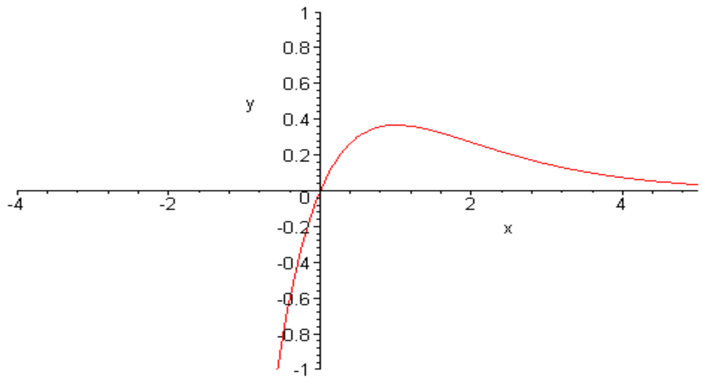
temos f'(x)=(1-x)/e^x, que só se anula em x=1, e é positivo antes e negativo depois de 1, logo a função cresce antes de 1 e decresce depois, logo é um máximo local. Não há mínimo local.

d) determine os intervalos onde f é crescente e onde f é decrescente.

Como visto acima, f cresce em x<1 e decresce em x>1.

e)esboce o gráfico de f.

juntando as informações: f vem de menos infinito, cresce até x=1, onde f vale 1/e, e decresce daí em diante, tendendo a zero. O gráfico fica:



3.Considere f(x) =ln(5x+2).

a)encontre o domínio de f

logaritmo só está definido para números positivos, logo o domínio é dado por 5x+2>0, ou seja x>-2/5.

b)mostre que f é inversível.

f é crescente porque é a composta de duas funções crescentes: g(x)=5x+2 e h(x)=ln(x).

ou : calcula-se a derivada, que é 5/(5x+2) , que é positiva , já que 5x+2 é positiva no domínio de f. Logo f é crescente.

E toda função crescente é inversivel.

c) Encontre a solução da equação f(x)=3.

Ln(5x+2)=3 implica 5x+2=exp(3), ou seja x= (exp(3)-2)/5.

d) calcule a derivada da inversa de f no ponto 3.

Seja finv a função inversa. Então obtemos finv(y) resolvendo f(x)=y em y. Repetindo o que foi feito com y=3, vem finv(y)= (exp(y)-2)/5. Calculando a derivada, vem exp(y)/5. Fazendo y=3, fica exp(3)/5.

Ou usando a fórmula: finv'(y)=1/f'(x) sendo y=f(x). Como f'(x)=5/(5x+2), temos 1/f'(x) = x+2/5.

Logo finv'(3)= (exp(3)-2)/5 +2/5 = exp(3)/5.

2ª parte: com maple.

1.Seja o triangulo curvilíneo de lados :

A curva y=x^2 -1 ,

A reta x+y=5

A reta tangente à curva y=x^2-1 no ponto (½, -3/4).

a)esboce a região.

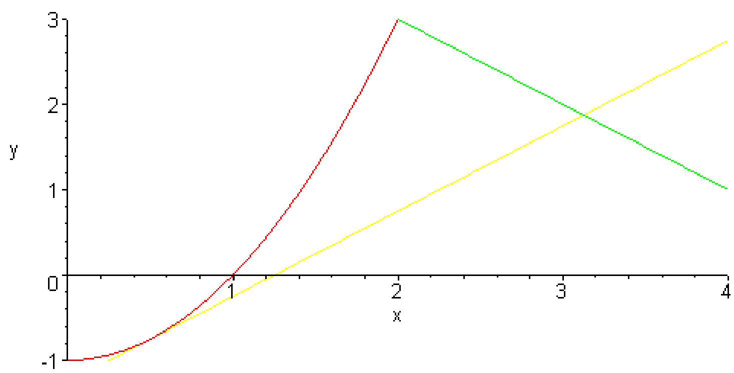
Para isso vamos calcular a equação da tangente e depois usar plot.

A reta tangente ao gráfico y=f(x) no ponto (a,f(a)) tem equação y=f(a)+f'(a)*(x-a).

Aqui f(x)= x^2-1, então fica y=-3/4+1*(x-1/2).

Escrevemos então: plot([x^2 -1,5-x,-3/4+1*(x-1/2)],x=-10..10); Depois a gente olha a figura e ajusta os limites se preciso.

A figura fica melhor se fazemos plot([x^2 -1,5-x, =-3/4+1*(x-1/2)], x=0..4,y=-1..3);



b.determine os tres vertices do triangulo.

O primeiro é o ponto de tangência: (½, -3/4). O segundo é a interseção da curva com a reta y=5-x, que se obtém resolvendo 5-x= x^2-1, que dá 2. Podemos escrever solve(5-x= x^2-1); que dá 2 respostas: -3 e 2 , e vê-se da figura que a que serve é x=2. Levando na equação da reta, achamos y=3. O terceiro ponto é a interseção das 2 retas. De novo podemos usar o maple e escrever:solve ({x+y=5, y=-3/4+1*(x-1/2)},{(x,y}); deste jeito já dá direto as duas coordenadas, mas pode ser feito como antes solve(5-x==-3/4+1*(x-1/2)); e depois calcular o y.

O ponto é(25/8,15/8).

c) expresse a área do triangulo como soma de integrais.

Area=int(x^2-1-(-3/4+1*(x-1/2)), x=1/2..2) + int(5-x-(-3/4+1*(x-1/2)),x=2..25/8)

d)calcule a área do triangulo.

Usando o maple , e o comando acima:vem área=153/64

2.Considere um tanque com capacidade de 3500 l, inicialmente cheio com água pura. A partir de determinado instante são inseridos no tanque. Através de duas entradas independents, as seguintes soluções de sal e água:

Torneira 1.solução com 0,2 kg de sal/litro, à taxa de 20 litros por minuto.

Torneira 2. solução com 0,4 kg de sal/litro, à taxa de 15 litros por minute.

Simultaneamente é escoada a mistura de água e sal a uma taxa de 35 litros por minuto.

Determine:

a) a equação diferencial para a quantidade de sal y no tanque.

A equação é dy/dt = taxa de entrada – taxa de saida.

Taxa de entrada= 0,2*20 kg de sal por minuto + 0,4*15 kg de sal por minuto =
10 kg/min

Taxa de saida= (35/3500)*y kg/min. já que em 3500 l há y kg de sal e saem 35 l/min.

A eq. fica dy/dt = 10- y/100 .

b)a quantidade de sal no tanque em função do tempo.

Temos que resolver a eq. diferencial com condição inicial y(0)=0, já que inicialmente não há sal no tanque.

Usando o maple: with(DEtools);

edo:= diff(y(t),t)= 10-y(t)/100;

dsolve (edo, y(t));

a resposta é y(t)=1000+C* e^(-t/100)

fazendo y(0)=0, vem 0=1000+C, logo C=-1000, e a solução é y=1000*(1- e^(-t/100)).

c)a quantidade limite de sal no tanque para esse processo de mistura.

Devemos calcular o limite de y quando t vai ao infinito. Ora quando t vai ao infinito, e(-t/100) vai a zero , logo y vai a 1000.

O valor limite é 1000kg de sal.

d) quanto tempo leva para atingir 95% do valor limite.

Queremos resolver 1000*(1- e^(-t/100) = 950. Usando maple:

solve(1000*(1- exp(-t/100)) = 950,t);

e a resposta é 100*ln(20) .

Obtemos um valor aproximado, em minutos, fazendo evalf(%); o que dá 299,57 minutos ou seja, quase 5 horas.(4,99 horas).