P2 de Álgebra Linear I – 2005.2

Data: 10 de outubro de 2005.

Início: 17h:05min Fim: 18h:55min

Nome:____________________________________ Matrícula:__________
Assinatura:________________________________ Turma:__________

Questão	Valor	Nota	Revis.
1	2.0		
2a	1.0		
2b	1.0		
2c	1.0		
2d	0.5		
2e	0.5		
3a	0.5		
3b	0.5		
3c	1.0		
4	2.0		
Total	10.0		

Instruções:

- **Não é permitido usar calculadora. Mantenha o celular desligado. Escreva de forma clara e legível.**
- **É proibido desgrampear a prova. Prova com folhas faltando ou rasuradas terá nota zero.**
- **Nas questões 2, 3 e 4 justifique todas as respostas de forma completa, ordenada e coerente.**
- **Faça a prova na sua turma.**

1) Decida se cada afirmação a seguir é verdadeira ou falsa.

Atenção: responda **todos** os itens, use N= não sei caso você não saiba a resposta.

Atenção: esta questão poderá ter nota **negativa**.

- Cada resposta certa vale 0.4.
- Cada resposta **N** vale 0.
- Respostas confusas e ou rasuradas serão contabilizadas como erradas.
- A pontuação das respostas erradas segue a seguinte tabela progressiva:

Núm. questões erradas	1	2	3	4	5
Pontos negativos	0	0.4	0.8	1.6	2.0

Marque com caneta no quadro abaixo as respostas

Não é necessário justificar

Itens	**V**	**F**	**N**
1.a			
1.b			
1.c			
1.d			
1.e			

1.a) Considere duas bases β e γ de $\mathbb{R}^2$ e um vetor v não nulo de $\mathbb{R}^2$. Suponha que o vetor v tem as mesmas coordenadas nas bases β e γ. Então as bases β e γ são iguais.

1.b) Não existe uma transformação linear $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que leve a reta

$$r\colon (1+t, 2+2\,t, -3-3\,t), \quad t \in \mathbb{R},$$

na reta

$$s\colon (1+t, 2-t, 3+t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

1.c) Considere as transformações lineares

$$L, \quad T, \quad S\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,$$

cujas matrizes na base canônica são respectivamente

$$[L] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad [T] = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad [S] = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

As imagens de L, T e S são iguais.

1.d) A transformação

$$T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad T(x,y) = (|x|, y),$$

verifica $T(0,0) = (0,0)$ e é linear.

1.e) Os vetores

$$\{(1,1,2); (\lambda, 1, \lambda); (1,2,3)\}$$

são linearmente independentes para todo valor de $\lambda \in \mathbb{R}$.

2) Considere os vetores

$$v_1 = (1, 2, 3), \qquad v_2 = (-1, 0, 1)$$

e defina a transformação linear

$$T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad T(u) = (u \cdot v_1, u \cdot v_2, u \cdot (v_1 + v_2)).$$

<u>Observação:</u> $v \cdot w$ denota o produto escalar dos vetores v e w.

<u>Observação:</u> $v \cdot w$ denota o produto escalar dos vetores v e w.

(a) Determine a matriz $[T]$ da transformação linear T na base canônica.

(b) Determine a equação cartesiana da imagem de T.

(c) Determine a equação paramétrica do conjunto de vetores $u \in \mathbb{R}^3$ que verificam $T(u) = 0$.

(d) Determine a equação paramétrica da imagem do plano

$$\rho\colon x - y - 3z = 0$$

pela transformação T.

(e) Determine a matriz da transformação linear T^2 na base canônica.

Resposta:

3) Considere os vetores

$$u_1 = (0,3,2), \quad u_2 = (1,2,1), \quad u_3 = (4,5,2), \quad u_4 = (-4,1,2).$$

(a) Determine a equação cartesiana do subespaço $\mathbb{V}$ gerado pelos vetores u_1, u_2, u_3 e u_4.

(b) Determine uma base β do subespaço $\mathbb{V}$ formada por vetores do conjunto $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$.

(c) Considere agora o vetor v que na base β tem coordenadas

$$(v)_\beta = (2,1).$$

Determine as coordenadas do vetor v na base canônica.

Resposta:

4) Considere as seguintes retas de $\mathbb{R}^2$

$$r_1\colon 3\,x - y = 5, \qquad r_2\colon (t-1, -2\,t+7), \quad t \in \mathbb{R}.$$

e

$$s_1\colon (2\,t-1, t+3), \quad t \in \mathbb{R}, \qquad s_2\colon 3\,x - y = 9.$$

Determine a forma matricial de uma transformação afim S

$$S\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

que verifica

$$S(r_1) = s_1 \qquad \text{e} \qquad S(r_2) = s_2.$$

Resposta: