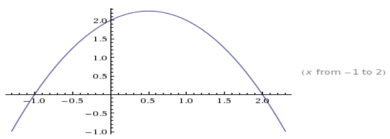
Gabarito - G1 de MAT1158 – Cálculo B – 1º de Setembro de 2011

1. Seja $f(x) = 2 + x - x^2$

   a. (0,4) Esboce o gráfico de f

   b. (0,8) $\int_1^2 f(x)\ dx = \int_1^2 2 + x - x^2\ dx = \left[2x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_{x=1}^{x=2} = \left(4 + \frac{2^2}{2} - \frac{2^3}{3}\right) - \left(2 + \frac{1^2}{2} - \frac{1^3}{3}\right) = 6 - \frac{8}{3} - 2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = 4 - \frac{1}{2} - \frac{7}{3} = \frac{24-3-14}{6} = \frac{7}{6}$

   c. (0,4) Qual o significado geométrico para o valor obtido no item b) Como f é positiva no intervalo $[1, 2]$, a integral definida de f neste intervalo é a área da região delimitada pelas curvas $y = f(x),\ y = 0$ e as retas $x = 1\ e\ x = 2$.

   d. (0,4) Ache o intervalo $[a, b]$ para o qual o valor da integral $\int_a^b f(x)\ dx$ é máximo. A área liquida cresce quando f é positiva e decresce quando f é negativa, logo neste caso será máxima no único intervalo em que f é positiva: $[-1, 2]$

2. Calcule as integrais: (0,7 nas duas melhores e 0,6 na pior)

   a. $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x}}\ dx$ Seja $u = 1 - x \rightarrow du = -dx$ e $x = 1 - u$ então $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x}}\ dx = -\int \frac{(1-u)^2}{\sqrt{u}}\ du = -\int \frac{1-2u+u^2}{\sqrt{u}}\ du =$

   $\int -u^{-1/2} + 2\,u^{1/2} - u^{3/2}\ du = -\frac{u^{1/2}}{1/2} + 2\frac{u^{3/2}}{3/2} - \frac{u^{5/2}}{5/2} + C =$

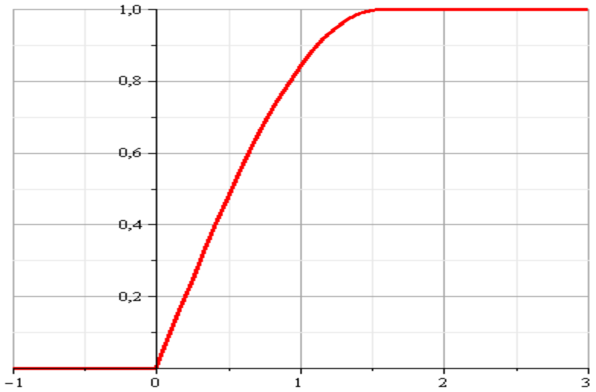
   $-2(1-x)^{1/2} + \frac{4}{3}(1-x)^{3/2} - \frac{2}{5}(1-x)^{5/2} + C$

   b. $\int_0^{\sqrt{\pi}} x \cdot cos(x^2)\ dx$ Seja $u = x^2 \rightarrow du = 2x\ dx \rightarrow \frac{1}{2}du = x\ dx$ então $\int_{x=0}^{x=\sqrt{\pi}} x \cdot cos(x^2)\ dx = \frac{1}{2}\int_{u=0}^{u=\pi} cos(u)\ du = \frac{1}{2}\big(sen(\pi) - sen(0)\big) = 0$

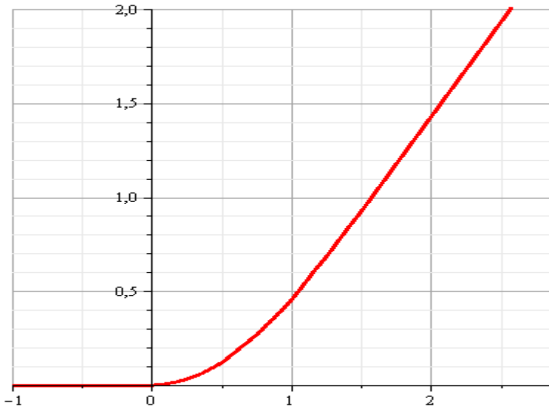
   c. $\int (3x-7)^{\sqrt{5}}\ dx$ Seja $u = 3x - 7 \rightarrow du = 3dx \rightarrow \frac{1}{3}\ du = dx$ então $\int (3x-7)^{\sqrt{5}}\ dx = \int \frac{1}{3}(u)^{\sqrt{5}}\ du = \frac{1}{3}\frac{(u)^{\sqrt{5}+1}}{\sqrt{5}+1} + C = \frac{(3x-7)^{\sqrt{5}+1}}{3(\sqrt{5}+1)} + C$

3. Seja $f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ sen(x) & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ 1 & x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$ e seja $g(x) = \int_0^x f(t)\,dt$

a. (1,0) Esboce o gráfico de f



b. (1,0) Esboce o gráfico de g



Antes de mais nada, g é a função área acumulada de uma função positiva, portanto contínua e crescente. Além disso observe que, $\int \sin(x)\,dx = -cos(x) + C$ portanto para $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, $g(x) = \int_0^x sin(t)\ dt = -cos(x) + cos(0) = 1 - cos(x)$ e $g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin(t)\ dt = -cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + cos(0) = 1$. Mas $\int 1\,dt = t + C$ então para $x > \frac{\pi}{2}$, $g(x) = x + D$ porém $g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 = \frac{\pi}{2} + D \rightarrow D = 1 - \frac{\pi}{2}$ $e\ g(x) = x + 1 - \frac{\pi}{2}$ para $x > \frac{\pi}{2}$

c. (1,0) $g'(x) = f(x)$ e como $0 \leq \frac{\pi}{6} \leq \frac{\pi}{2}$, $g'\left(\frac{\pi}{6}\right) = f\left(\frac{\pi}{6}\right) = sen\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$