ENG 1007 – INTRODUÇÃO À MECÂNICA DOS SÓLIDOS

Segunda prova – turma C 22/10/2013

1ª Questão (2,5 pontos)

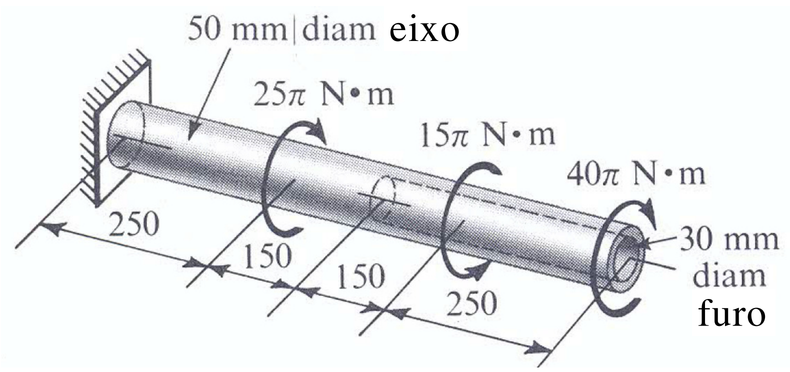
O eixo da figura abaixo tem um trecho maciço de 400*cm* de comprimento e outro vazado, também de 400*cm* de comprimento. O módulo de elasticidade transversal do material é G = 84*GPa*. Determine:

1- a máxima tensão cisalhante atuante,
2- o ângulo de rotação da extremidade livre.

$$\tau = \frac{Tr}{J}$$

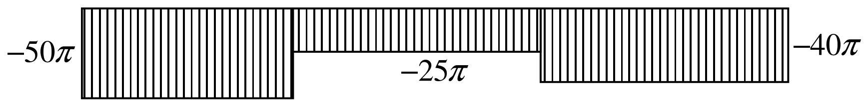
$$J = \frac{\pi}{2}(r_e^4 - r_i^4)$$

$$\Delta\varphi = \frac{T\Delta L}{GJ}$$



Resposta

Diagrama de torques:



Primeiro trecho: $\tau_{máx} = \dfrac{50\pi Nm \times 25 \times 10^{-3} m}{\pi/2 \times 25^4 \times 10^{-12} m^4} = 6,4 MPa$ $\Longleftarrow$ Máximo valor

Segundo trecho: $\tau_{máx} = \dfrac{25\pi Nm \times 25 \times 10^{-3} m}{\pi/2 \times 25^4 \times 10^{-12} m^4} = 3,2 MPa$

Terceiro trecho: $\tau_{máx} = \dfrac{25\pi Nm \times 25 \times 10^{-3} m}{\pi/2 \times \left(25^4 - 15^4\right) \times 10^{-12} m^4} = 3,67 MPa$

Quarto trecho: $\tau_{máx} = \dfrac{40\pi Nm \times 25 \times 10^{-3} m}{\pi/2 \times \left(25^4 - 15^4\right) \times 10^{-12} m^4} = 5,88 MPa$.

Rotação entre as extremidades do eixo (valores em *N* e *m*):

$$\Delta\varphi = \frac{1}{\pi/2 \times 84 \times 10^9}\left(\frac{-50\pi \times 2,5}{25^4 \times 10^{-12}} - \frac{25\pi \times 1,5}{25^4 \times 10^{-12}} - \frac{25\pi \times 1,5}{(25^4 - 15^4) \times 10^{-12}} - \frac{40\pi \times 2,5}{(25^4 - 15^4) \times 10^{-12}} \right) = -0,0195 rad$$

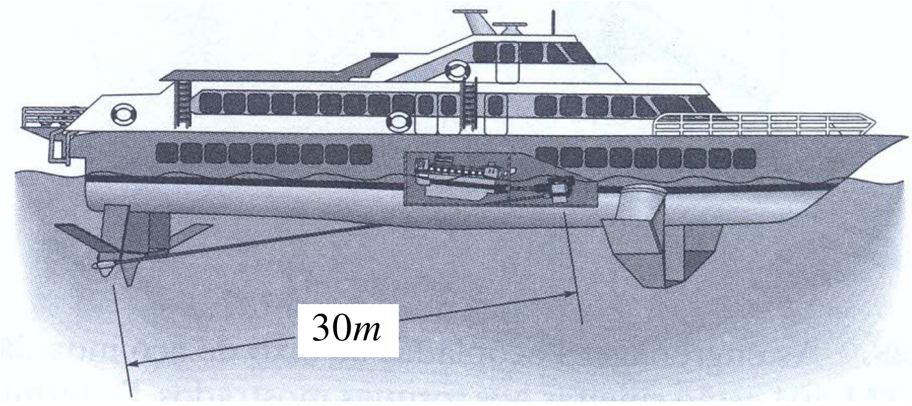
2ª Questão (2,5 pontos)

O eixo do hélice do hidrofólio mostrado abaixo é feito de aço (G = 84*GPa*) e tem 30*m* de comprimento. Este eixo está acoplado a um motor diesel que fornece potência máxima de 2500*hp* e gira a 1700*rpm*. Se o diâmetro externo do eixo é de 20*cm* e a espessura da parede é de 1,5*cm*,

a) qual é a tensão de cisalhamento máxima desenvolvida no eixo?

b) Qual é o ângulo de torção do eixo entre motor e hélice quando a máxima potência é transmitida?

$$P = 2\pi\, nT \;;\quad \tau(x,\rho) = \frac{T(x)G\rho}{2\pi\int_0^{r(x)} G\rho^3 d\rho} \;;\quad 1hp = 746W$$



Resposta

$P = 2\pi\, nT \quad \Rightarrow \quad 2500\times 746 N/s = 2\pi 1700/60 \times T \quad \Rightarrow \quad T = 10,476 kNm$

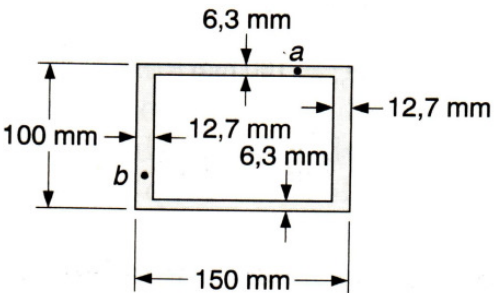
$$\tau_{máx} = \frac{T\times 0,1m}{\pi/2\times\left(10^4 - 8,5^4\right)\times 10^{-8} m^4} = 13,95MPa$$

$$\Delta\varphi = \frac{T\times 30m}{84GPa\times\pi/2\times\left(10^4 - 8,5^4\right)\times 10^{-8} m^4} = 0,0498\ rad$$

3ª Questão (2,5 pontos)

Um torque de 6,8*kNm* é aplicado a um eixo vazado de alumínio que tem a seção transversal mostrada na figura. Desprezando o efeito da concentração de tensões, determinar:

a) a tensão de cisalhamento no ponto *a*;
b) a tensão de cisalhamento no ponto *b*;
c) a rotação entre duas seções do tubo, que distam L = 1*m* entre si (o módulo de elasticidade transversal do alumínio é G = 26*GPa*).



$$\tau = \frac{T}{2A_m t} \qquad d\varphi = \frac{T}{4A_m^2 G}\int_{C_m}\frac{ds}{t}\,dx$$

Resposta:

A área média A_m é igual à do retângulo $(150-12,7)\times(100-6,3)mm^2 = 0,0128651m^2$.

a) $\tau_a = \dfrac{6,8kNm}{2\times 0,0128651m^2\times 0,0063m} = 41,950MPa$;

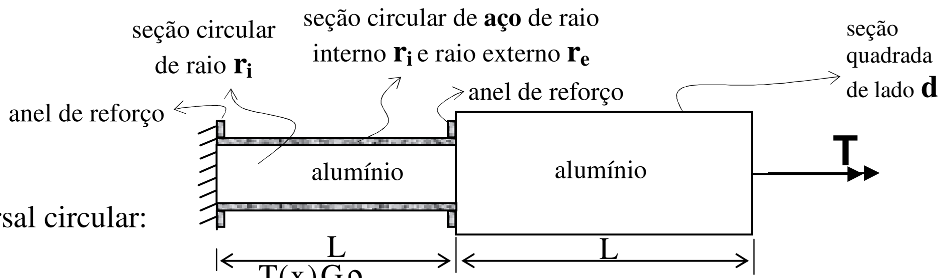
b) $\tau_b = \dfrac{6,8kNm}{2\times 0,0128651m^2\times 0,0127m} = 20,810MPa$;

c) $\Delta\varphi = \dfrac{6{,}8kNm \times 1m \times \big((150-12{,}7)/6{,}3 + (100-6{,}3)/12{,}7\big) \times 2}{4 \times 0{,}0128651^2 m^4 \times 26 \times 10^6 kN/m^2} = 0{,}02305\ rad$.

4ª Questão (2,5 pontos)

Calcular o valor máximo do torque **T** que o eixo composto de aço e alumínio pode suportar, sabendo que a tensão máxima admissível do aço é $\tau_{adm}^{aço}$ = 400*MPa*, a tensão máxima admissível do alumínio é τ_{adm}^{al} = 200*MPa* e o ângulo máximo de rotação da extremidade livre é ϕ_{adm} = 0,1 radianos. Os módulos de elasticidade transversal do aço e do alumínio são, respectivamente, $G_{aço}$ = 84*GPa* e G_{al} = 28*GPa*. O eixo consiste em um segmento de alumínio de comprimento L = 1*m* e seção transversal quadrada de lado d = 20*cm*, acoplado a outro segmento também de alumínio de comprimento L = 1*m* e seção transversal circular de raio r_i = 9*cm*. O segmento circular de alumínio está encamisado por um tubo vazado de aço de raio interno r_i = 9*cm* e raio externo r_e = 10*cm*.

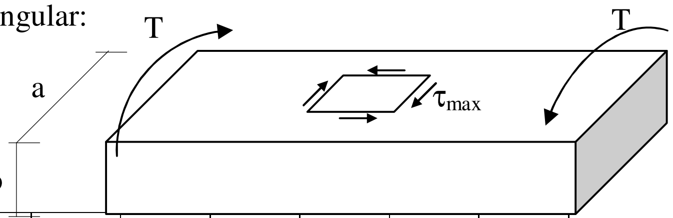
Para a obtenção do torque máximo admissível **T**, deve-se considerar a rotação da extremidade livre do tubo, além das tensões máximas que ocorrem no segmento de seção circular de alumínio, no segmento de seção quadrada de alumínio e no segmento de seção vazada de aço. Os anéis de reforço indicados não são considerados nos cálculos.



Barra de seção transversal circular:

$$\phi_L - \phi_0 = \int_0^L \frac{T(x)}{2\pi\int_0^{r(x)} G\rho^3 d\rho} dx \qquad \tau(x,\rho) = \frac{T(x)G\rho}{2\pi\int_0^{r(x)} G\rho^3 d\rho}$$

Barra de seção transversal retangular:



$$\phi_L - \phi_0 = \frac{TL}{\beta ab^3 G}$$

$$\tau_{max} = \frac{T}{\alpha ab^2}$$

a/b	1,0	1,2	1,5	2,0	2,5	3,0	4,0	5,0	10,0	∞
α	0,208	0,219	0,231	0,246	0,258	0,267	0,282	0,291	0,312	0,333
β	0,141	0,166	0,196	0,229	0,249	0,263	0,281	0,291	0,312	0,333

Resposta

Rotação da extremidade livre: $\Delta\phi = \dfrac{TL}{G_{al}\dfrac{\pi}{2}r_i^4 + G_{aço}\dfrac{\pi}{2}(r_e^4 - r_i^4)} + \dfrac{TL}{G_{al}\beta ab^3}$

ou $\Delta\phi = \dfrac{T \times 1}{28\times10^9 \dfrac{\pi}{2} 0{,}09^4 + 84\times10^9 \dfrac{\pi}{2}(0{,}1^4 - 0{,}09^4)} + \dfrac{T \times 1}{28\times10^9 \times 0{,}141 \times 0{,}2^4} \approx 0{,}293\times10^{-6}\,T\ (rad)$

Tensão máxima no tubo circular de alumínio:

$$\tau_c^{al} = \frac{TG_{al}r_i}{G_{al}\frac{\pi}{2}r_i^4 + G_{aço}\frac{\pi}{2}(r_e^4 - r_i^4)} = \frac{T\times 28\times 10^9 \times 0{,}09}{28\times 10^9\frac{\pi}{2}0{,}09^4 + 84\times 10^9\frac{\pi}{2}(0{,}1^4 - 0{,}09^4)} \approx 339T(Pa)$$

Tensão máxima no tubo circular vazado de aço:

$$\tau^{aço} = \frac{TG_{aço}r_e}{G_{al}\frac{\pi}{2}r_i^4 + G_{aço}\frac{\pi}{2}(r_e^4 - r_i^4)} = \frac{T\times 84\times 10^9 \times 0{,}1}{28\times 10^9\frac{\pi}{2}0{,}09^4 + 84\times 10^9\frac{\pi}{2}(0{,}1^4 - 0{,}09^4)} \approx 1131T(Pa)$$

Tensão máxima no segmento de alumínio de seção quadrada:

$$\tau_q^{al} = \frac{T}{\alpha ab^2} = \frac{T}{0{,}208\times 0{,}2^3} \approx 601T\ (Pa)$$

Comparação com os valores máximos admissíveis:

$$\begin{cases} \Delta\phi \approx 0{,}293\times 10^{-6}\,T \le 0{,}1\,\text{rad} \Rightarrow T \le 341\,\text{kNm} \\ \tau_c^{al} \approx 339\,T \le \tau_{adm}^{al} = 200\,\text{MPa} \Rightarrow T \le 589\,\text{kNm} \\ \tau^{aço} \approx 1131\,T \le \tau_{adm}^{aço} 400\,\text{MPa} \Rightarrow T \le 353\,\text{kNm} \\ \tau_q^{al} \approx 601\,T \le \tau_{adm}^{al} = 200\,\text{MPa} \Rightarrow T \le 333\,\text{kNm} \end{cases}$$

$$\boxed{\text{Portanto, } T_{máx} = 333\ \text{kNm}}$$