ENG 1007 – INTRODUÇÃO À MECÂNICA DOS SÓLIDOS

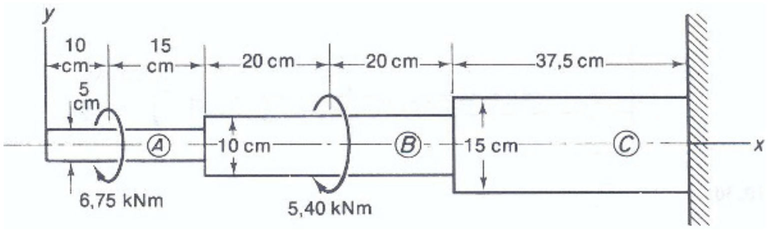
Segunda prova – turma D 16/10/2014

1ª Questão (2,5 pontos)

a) Traçar o diagrama de $\tau_{máx}$ em função de x para a série de eixos soldados entre si, como mostra a figura abaixo.

b) Qual é o ângulo de torção total na extremidade esquerda?

Usar $G_A = 70GPa$, $G_B = 140GPa$, $G_C = 105GPa$.



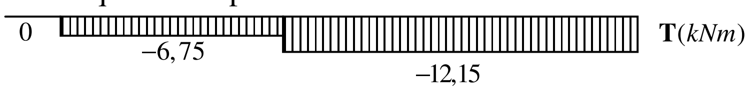
$$\tau = \frac{T\rho}{J}$$

$$J = \frac{\pi d^4}{32}$$

$$\Delta\varphi = \frac{T\,\Delta L}{GJ}$$

Resposta:

O diagrama de torques está apresentado abaixo



a) Tensões de cisalhamento trecho a trecho

Trecho $0 \le x < 10cm$: $\tau_{máx} = 0$

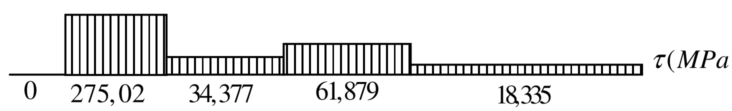
Trecho $10cm < x < 25cm$: $\tau_{máx} = \dfrac{6,75kNm}{\pi \times 0,025^3 m^3 / 2} = 275,02MPa$

Trecho $25cm < x < 45cm$: $\tau_{máx} = \dfrac{6,75kNm}{\pi \times 0,05^3 m^3 / 2} = 34,377MPa$

Trecho $45cm < x < 65cm$: $\tau_{máx} = \dfrac{12,15kNm}{\pi \times 0,05^3 m^3 / 2} = 61,879MPa$

Trecho $65cm < x < 102,5cm$: $\tau_{máx} = \dfrac{12,15kNm}{\pi \times 0,075^3 m^3 / 2} = 18,335MPa$

Diagrama correspondente (fora de escala):

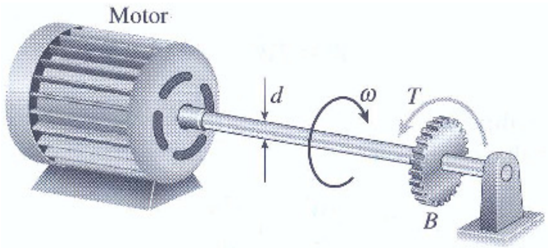


b) $\Delta\varphi = \dfrac{-2}{\pi \times 10^{-6}} \left(\dfrac{6,75 \times 0,15}{70 \times 0,025^4} + \dfrac{6,75 \times 0,2}{140 \times 0,05^4} + \dfrac{12,5 \times 0,2}{140 \times 0,05^4} + \dfrac{12,5 \times 0,375}{105 \times 0,075^4} \right) = -0,0272rad$

2ª Questão (2,5 pontos)

O motor de engrenagens desenvolve 40 *hp* para uma engrenagem em B, conforme a figura. A tensão de cisalhamento admissível do eixo, que é circular e maciço, é $\tau_{adm} = 100 MPa$. Determinar o diâmetro necessário

a) se o eixo é operado a 500 *rpm*,
b) se o eixo é operado a 3000 *rpm*.



$$P = 2\pi\, nT \ ; \quad \tau\left(x,\rho\right) = \frac{T\left(x\right)G\rho}{2\pi\int_0^{r(x)} G\rho^3 d\rho}$$

$$1\, hp = 745,7\, W$$

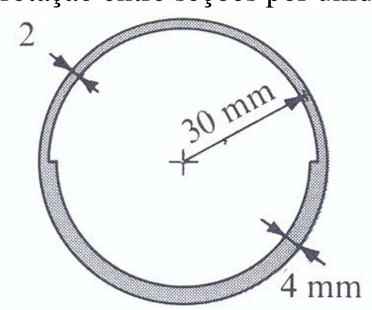
Resposta:

a) $T = \dfrac{40\times 745,7}{2\pi\times 500/60} = 569,672 Nm$; $\quad \tau_{adm} = 100 MPa = \dfrac{569,672 Nm}{\pi d^3/16} \quad \Rightarrow \quad d = 0,0307 m$

b) $T = \dfrac{40\times 745,7}{2\pi\times 3000/60} = 94,945 Nm$; $\quad \tau_{adm} = 100 MPa = \dfrac{94,945 Nm}{\pi d^3/16} \quad \Rightarrow \quad d = 0,0169 m$

3ª Questão (2,5 pontos)

Um eixo tem a seção transversal indicada na figura. Encontre a máxima tensão de cisalhamento e a rotação entre seções por unidade de comprimento, para um torque atuante de 100 *Nm*.



$$\tau = \frac{\mathbf{T}}{2A_m t} \qquad d\varphi = \frac{\mathbf{T}}{4A_m^2 G}\int_{C_m} \frac{ds}{t}\, dx$$

Resposta:

$A_m = \dfrac{\pi}{2}(30^2 + 29^2) mm^2 = 2734,75\times 10^{-6} m^2$; $\quad \displaystyle\int_{C_m} \frac{ds}{t} = \pi\left(\frac{30}{2} + \frac{29}{4}\right) = 69,9$

a) $\tau_{máx} = \dfrac{100 Nm}{2\times 0,002734,75 m^2 \times 0,002 m} = 9,141 MPa$

b) $\Delta\varphi/m = \dfrac{100 Nm \times 69,9}{4\times\left(0,002734,75 m^2\right)^2 \times G} = \dfrac{233,659\times 10^6}{G} rad/m$ (módulo de elasticidade *G* em *GPa*)

4ª Questão (2,5 pontos)

Compare a máxima tensão de cisalhamento e o ângulo de rotação entre seções de eixos de mesmo comprimento e submetidos ao mesmo torque, para seções, todas com a mesma área, com os seguintes formatos:

a) seção circular de 100 *mm* de diâmetro;
b) seção quadrada;
c) seção retangular de 25 *mm* de largura.

Fórmulas para eixo de seção transversal retangular:

$$\tau_{máx} = \frac{\mathbf{T}}{\alpha ab^2} \qquad \Delta\phi = \frac{\mathbf{T}L}{\beta ab^3 G}$$

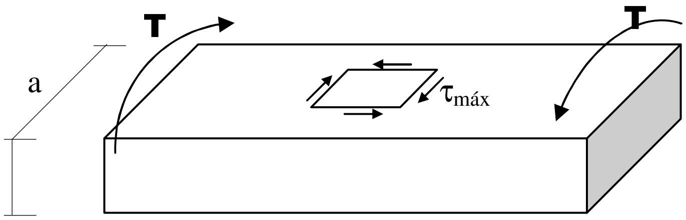


Tabela para obtenção dos coeficientes α e β

a/b	1,0	1,2	1,5	2,0	2,5	3,0	4,0	5,0	10,0	∞
α	0,208	0,219	0,231	0,246	0,258	0,267	0,282	0,291	0,312	0,333
β	0,141	0,166	0,196	0,229	0,249	0,263	0,281	0,291	0,312	0,333

Resposta:

As comparações podem ser feitas para uma seção transversal circular de diâmetro *d*, o que economiza contas.

a) Para a seção circular de diâmetro *d* e área $\pi d^2/4$, a tensão máxima e a rotação entre duas seções são dadas por $\tau_c = \dfrac{16\mathbf{T}}{\pi d^3}$ $\Delta\varphi_c = \dfrac{32\mathbf{T}L}{\pi d^4 G}$.

b) Para a seção quadrada de mesma área que a circular, um lado *D* vale $D = \pi^{1/2} d/2$. As fórmulas para seção quadrada são usadas com $\alpha = 0,208$ e $\beta = 0,141$, segundo a tabela fornecida. Então,

$$\tau_q = \frac{\mathbf{T}}{0,208D^3} = \frac{8\mathbf{T}}{0,208\pi^{3/2}d^3} = \frac{1}{2\times 0,208\pi^{1/2}}\frac{16\mathbf{T}}{\pi d^3} \approx 1,356\tau_c\,,$$

$$\Delta\varphi_q = \frac{\mathbf{T}L}{0,141D^4G} = \frac{16\mathbf{T}L}{0,141\pi^2d^4G} = \frac{1}{2\times 0,141\pi}\frac{32\mathbf{T}L}{\pi d^4G} \approx 1,129\Delta\varphi_c\,.$$

c) Para a seção retangular de mesma área que a circular, com largura $d/4$, a altura *h* vale $h = \pi d$. As fórmulas para seção retangular são usadas para a relação $a/b = \pi d/(d/4) = 4\pi \approx 12,6 \;\Rightarrow\; \alpha = \beta \approx 1/3$, segundo a tabela fornecida. Então,

$$\tau_r = \frac{\mathbf{T}}{1/3\pi d\times(d/4)^2} = \frac{48\mathbf{T}}{\pi d^3} = 3\frac{16\mathbf{T}}{\pi d^3} = 3\tau_c\,,$$

$$\Delta\varphi_r = \frac{\mathbf{T}L}{1/3\pi d\times(d/4)^3G} = \frac{192\mathbf{T}L}{\pi d^4G} = 6\frac{32\mathbf{T}L}{\pi d^4G} = 6\Delta\varphi_c\,.$$

Vê-se portanto que a seção transversal circular é a mais eficiente e a seção retangular é a menos eficiente, para a resistência à torção.