Aula 27 (18/11)

Diagonalização

Relembre: Def: $A, B \in M_{n\times n}$ são ditas semelhantes quando existe $P \in M_{n\times n}$ inversível tal que

$$\boxed{A = PBP^{-1}}$$

Def: Seja $A \in M_{n\times n}$. O polinômio característico de A é o polinômio

$$\boxed{p_A(t) = \det(A - t\cdot Id)}$$

Observe que $p_A(0) = \det(A - 0\cdot Id) = \det(A)$. Em outras palavras, o termo independente de p_A é o determinante de A.

Teorema: Seja $T: U \to U$ linear e β uma base de U. Então $p_{[T]_\beta}(t)$ não depende da escolha da base β.

Dem: dada uma outra base γ de U, temos que

$$[T]_\beta - t\cdot Id = [Id]_{\beta\leftarrow\gamma}[T]_\gamma[Id]_{\gamma\leftarrow\beta} - t\cdot Id$$

$$= [Id]_{\beta\leftarrow\gamma}\cdot[T]_\gamma\cdot[Id]_{\gamma\leftarrow\beta} - t[Id]_{\beta\leftarrow\gamma}\cdot Id\cdot[Id]_{\gamma\leftarrow\beta}$$

$$= [Id]_{\beta\leftarrow\gamma}\left([T]_\gamma - t\cdot Id\right).[Id]_{\gamma\leftarrow\beta}.$$ Portanto

$$p_{[T]_\beta}(t) = \det\left([T]_\beta - t\cdot Id\right)$$

$$= \det\left([Id]_{\beta\leftarrow\gamma}\cdot\left([T]_\gamma - t\cdot Id\right).[Id]_{\gamma\leftarrow\beta}\right)$$

$$= \det\left([T]_\gamma - t\cdot Id\right) = p_{[T]_\gamma}(t) \qquad \blacksquare$$

A demonstração acima na verdade mostra que matrizes semelhantes têm mesmo polinômio característico. Então:

<u>Teorema</u>: Matrizes semelhantes têm os mesmos autovalores.

Obs: matrizes semelhantes <u>não têm os mesmos autovetores</u>.

<u>Def</u>: $A \in M_{n\times n}$ é <u>diagonalizável</u> se A é semelhante a uma matriz diagonal.

<u>Exemplo</u>. (da aula anterior). $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, dada por $T(x,y) = (x-2y, -2x+y)$. A matriz de T na base canônica é $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ e ela é semelhante

a $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$, Tomando $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}}_{P} \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}}_{D} \underbrace{\begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}}_{P^{-1}}$$

. Portanto $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ é uma matriz diagonalizável.

<u>Obs</u>. A matriz P tem em suas colunas exatamente os autovetores de $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$. Isso não é coincidência.

<u>Def</u>: Uma Transformação linear $T: U \to U$ é <u>diagonalizável</u> se uma (e portanto TODAS) representação matricial de T é diagonalizável.

<u>Teorema</u>: $T: U \to U$ é diagonalizável se, e somente se, existe uma base β de U formada por autovetores de T.

<u>Dem</u>: ($\Longrightarrow$) Admita que T é diagonalizável. Vamos provar que existe uma base de autovetores. Como T é diagonalizável, existe $\beta = \{u_1, \dots, u_k\}$ base de U tal que $[T]_\gamma = \begin{bmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_k \end{bmatrix}$. Afirmamos que cada $u_j \in \beta$ é autovetor de T.

De fato, como $[u_1]_\beta = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, [u_k]_\beta = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, então

$$[T(u_1)]_\gamma = \begin{bmatrix} a_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = a_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},$$ ou seja, $T(u_1) = a_1 u_1$ e portanto

u_1 é autovetor de T assoc. a a_1. Analogamente:

$$[T(u_j)]_\gamma = \begin{bmatrix} \vdots \\ a_j \\ \vdots \end{bmatrix} = a_j \begin{bmatrix} | \\ 1 \\ | \end{bmatrix}$$ e portanto $T(u_j) = a_j u_j$.

($\Leftarrow$) Exercício. Dica: escreva a matriz $[T]_\beta$ usando o fato de cada $u_j \in \beta$ ser autovetor. ■

<u>Resumindo</u>: perguntar se T é diagonalizável é o mesmo que perguntar se existe uma base de autovetores. Logo:

<u>Pergunta</u>: Dada $T: U \to U$, como decidir se existe uma base de U de autovetores de T?

Uma resposta parcial é dada pelo seguinte fato, que apresentaremos sem demonstração:

<u>Fato</u>: autovetores associados a autovalores diferentes são linearmente independentes.

Exemplo: Seja $T: P_1 \longrightarrow P_1$ dada por $T(x-1) = 2x+1$ e $T(x+1) = 2x-1$. Essa transf. é diagonalizável?

Sol: a) Note que $\beta = \{x-1, x+1\}$ é base de P_1 (por quê?).

b) Vamos calcular os autovalores de T; como temos uma base, vamos primeiro determinar $[T]_\beta$.

$$T(x-1) = 2x+1 = a(x-1) + b(x+1) \Rightarrow \begin{cases} a = 1/2 \\ b = 3/2 \end{cases}$$

$$T(x+1) = 2x-1 = c(x-1) + d(x+1) \Rightarrow \begin{cases} c = 3/2 \\ d = 1/2 \end{cases}$$

Então $[T]_\beta = \begin{bmatrix} 1/2 & 3/2 \\ 3/2 & 1/2 \end{bmatrix}$

c) Polinômio característico:

$$\det \begin{bmatrix} 1/2-\lambda & 3/2 \\ 3/2 & 1/2-\lambda \end{bmatrix} = (1/2-\lambda)^2 - 9/4 = 0$$ se e somente se

$$\frac{1}{2} - \lambda = \frac{3}{2} \Rightarrow \boxed{\lambda = -1} \quad \text{e} \quad \frac{1}{2} - \lambda = -\frac{3}{2} \Rightarrow \boxed{\lambda = 2}$$

Portanto, T é diagonalizável, pois tem 2 autovalores distintos e, pelo fato anterior, 2 autovetores LI's.

Vamos achar a forma diagonal de T: (ver obs no alto da pg 143 da aula 26)

d) Autovetores de $[T]_\beta$:

$\underline{\lambda=-1}$: $Nuc([T]_\beta + Id)$

$$\begin{bmatrix} 3/2 & 3/2 \\ 3/2 & 3/2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow a=-b \Rightarrow u = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Portanto, um autovetor de T é o polinômio

$$p(x) = 1(x-1) + (-1)(x+1)$$
$$= -2 \text{, associado a } \lambda=-1$$

$\underline{\lambda=2}$: $Nuc([T]_\beta - 2Id)$

$$\begin{bmatrix} -3/2 & 3/2 \\ 3/2 & -3/2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow a=b \Rightarrow v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Portanto, um autovetor de T é o polinômio

$$q(x) = 1(x-1) + 1.(x+1) = 2x \text{, assoc. a } \lambda=2.$$

<u>Assim</u>: $T(-2) = 2$ e $T(2x) = 4x$. Na base $\gamma = \{-2, 2x\}$, a matriz de T é $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.

<u>Exercício</u>. Prove que $T(a+bx) = -a + 2bx$.