Aula 25 (11/11) REVISADA / REDUZIDA

Subespaços Invariantes

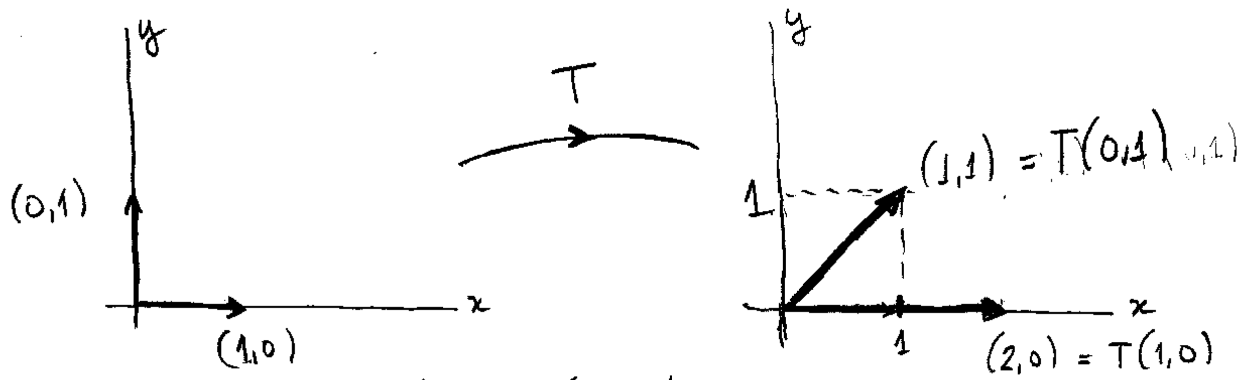
Pergunta: dada $T: U \to U$ linear, existe algum subespaço $V \subset U$ que fica "imóvel" ao aplicarmos T em V?

Exemplo 1: Seja $R_H: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a reflexão ortogonal em torno do plano $x - y + z = 0$. Temos que $H = \text{span}\{(1,1,0),(0,1,1)\}$ e $H^\perp = \text{span}\{(1,-1,1)\}$ e como $R_H(1,1,0) = (1,1,0)$, $R_H(0,1,1) = (0,1,1)$, então $R_H(H) = H$. Analogamente, como $R_H(1,-1,1) = (-1,1,-1)$, então $R_H(H^\perp) = H^\perp$ (embora o "sentido" troque).

Exemplo 2: Considere $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(x,y) = (2x+y, y)$. Existe $V \subset \mathbb{R}^2$ tal que $T(V) = V$?

Sol: Como T é bijetiva (Por quê?), então $T(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2$. Além de $V = \mathbb{R}^2$ ficar "imóvel", também $V = \text{span}\{(1,0)\}$ satisfaz a essa condição. De fato: $v \in V \iff v = (\lambda, 0)$ logo, $T(v) = T(\lambda,0) = (2\lambda + 0, 0) = (2\lambda, 0) \in V$.

e portanto $T(V) = V$.



eixo x é mantido "imóvel"

Exemplo 3: $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $T(x,y) = (y,-x)$.

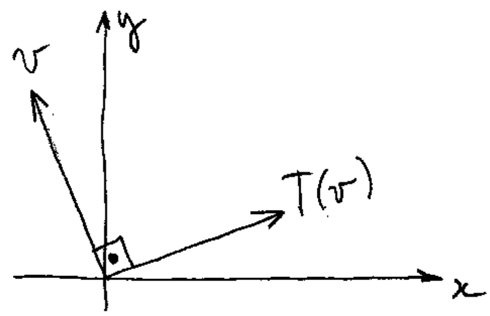
Novamente $T(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2$, pois T é bijetiva (Por quê?).

Mas não há subespaços de dimensão 1 "imóveis", pois

$$\langle T(x,y),(x,y)\rangle = \langle (y,-x),(x,y)\rangle$$

$$= 0, \text{ ou seja,}$$

$\forall v \in \mathbb{R}^2$, v e $T(v)$ são ortogonais.



Exemplo 4: Seja $P_H : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ a projeção ortogonal no plano $H = \text{span}\{(1,1,0),(0,1,0)\}$. Então certamente $P_H(H) = H$. Agora, sabemos que $(1,1,0)\times(0,1,0)$ é gerador de $H^\perp$. Como $(1,1,0)\times(0,1,0) = (0,0,1)$, temos que $P_H(0,0,1) = (0,0,0)$. Então,

$$P_H(H^\perp) = \{(0,0,0)\} \subset H^\perp.$$

Agora, considere $v \in H$ não nulo e o subespaço $V = \text{span}\{(0,0,1), v\}$. Vamos verificar que

$T(V) \subset V$:

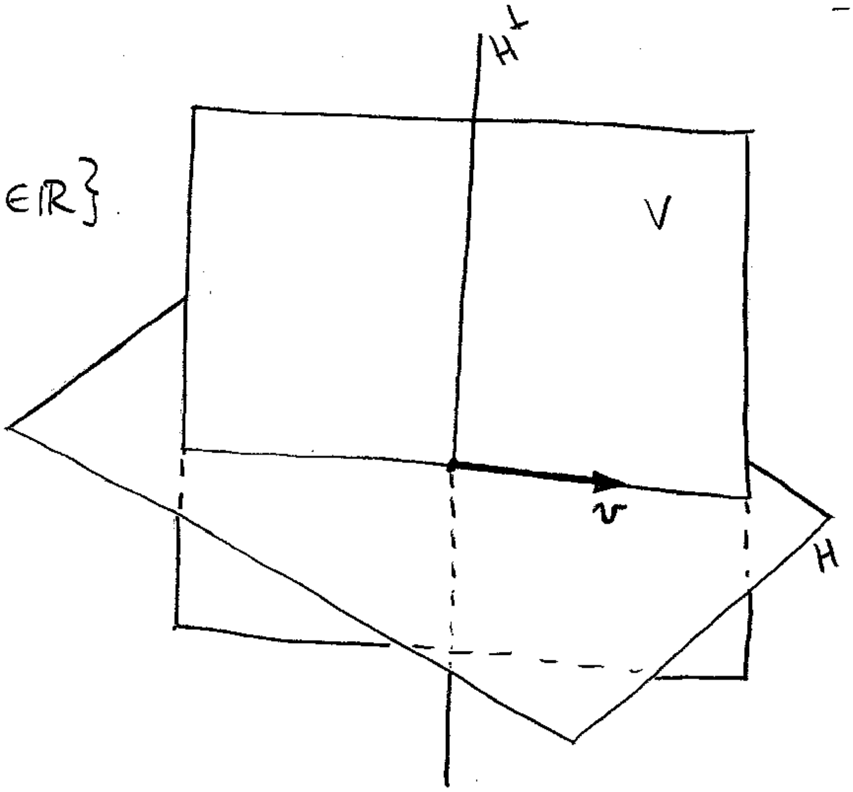
$V = \{ s(0,0,1) + tv \mid s,t \in \mathbb{R} \}$.

Então

$P_H(s(0,0,1) + tv)$

$= s\,\cancel{P_H(0,0,1)}^{\,0} + t\,P_H(v)$

$= t\,P_H(v) = tv$



Portanto:

$$P_H(V) = \operatorname{span}\{v\} \subset V. \quad \blacksquare$$

Vamos formalizar o que ocorre nesses 4 exemplos.

<u>Def</u>: Seja $T: U \longrightarrow U$ linear. Um subespaço $V \subset U$ é dito <u>invariante</u> quando $T(V) \subset V$.

<u>Exemplos</u>:
- No exemplo 1: $\mathbb{R}^3$, H e $H^\perp$
- No exemplo 2: $\mathbb{R}^2$, $V = \operatorname{span}\{(1,0)\}$
- No exemplo 3: apenas $\mathbb{R}^2$ e $\{(0,0)\}$
- No exemplo 4: H, $H^\perp$ e $H^\perp \oplus \operatorname{span}\{v\}$, com $v \in H$ não nulo.

Os espaços invariantes de <u>dimensão 1</u> são particularmente importantes e recebem um nome especial:

<u>Def</u>: Seja $T: U \to U$ linear. Um vetor <u>não nulo</u> $u \in U$ é um <u>autovetor</u> associado ao <u>autovalor</u> $\lambda \in \mathbb{R}$ quando

$$\boxed{T(u) = \lambda u}$$

<u>Obs</u>: λ pode ser nulo. De fato, os autovetores associados a $\lambda = 0$ são exatamente os elementos não nulos de $Nuc(T)$.

<u>Exemplos</u>:
- No exemplo 1, $v = (1,-1,1)$ é autovetor de R_H associado a $\lambda = -1$. Além disso, todo $v \in H$ não nulo é autovetor associado a $\lambda = 1$.
- No exemplo 2, $v = (1,0)$ é autovetor de T associado ao autovalor $\lambda = 2$.
- No exemplo 3, não há autovetores de T.
- No exemplo 4, $(0,0,1)$ é autovetor associado a $\lambda = 0$ (gerador do núcleo) e todo $v \in H$ não nulo é autovetor associado a $\lambda = 1$.