Aula 28 (25/11)

Teorema Espectral e Aplicações

Relembre: dadas $A \in M_{m\times n}$, $B \in M_{n\times s}$, então

$$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$$

e que dados $u, v \in \mathbb{R}^n$,

$$\langle u, v \rangle = [u_1 \cdots u_n] \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

Teorema Espectral: Seja $A \in M_{n\times n}$ uma matriz simétrica. Então:

1) A é diagonalizável e
2) Existe uma escolha de autovetores que formam uma base ortonormal de $\mathbb{R}^n$.

Dem: 1) Não provaremos aqui, pois a demonstração está um pouco além do objetivo do curso

2) Sejam $\lambda_1 \neq \lambda_2$ autovalores de A. Vamos provar que os autovetores v_1, v_2 associados são ortogonais:

• Afirmação: $\langle Av, w\rangle = \langle v, Aw\rangle$.

Dem: $\langle Av, w\rangle = (Av)^T(w)$

$$= v^T A^T w$$

$$= v^T A w = \langle v, Aw\rangle$$

• Afirmação: $\langle v_1, v_2\rangle = 0$.

Dem: $\langle Av_1, v_2\rangle = \langle \lambda_1 v_1, v_2\rangle = \lambda_1\langle v_1, v_2\rangle$

$\langle v_1, Av_2\rangle = \langle v_1, \lambda_2 v_2\rangle = \lambda_2\langle v_1, v_2\rangle$.

Como $\langle Av_1, v_2\rangle = \langle v_1, Av_2\rangle$, então

$\lambda_1\langle v_1, v_2\rangle = \lambda_2\langle v_1, v_2\rangle$. Como $\lambda_1 \neq \lambda_2$,

$\langle v_1, v_2\rangle = 0$

Se o autoespaço associado a λ tem dimensão maior que 1, basta tomar uma base ortonormal para este subespaço. ■

Aplicações

1) Problema (Cálculo II): encontrar um sistema de coordenadas de $\mathbb{R}^2$ que permita identificar o conjunto

$$S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, 7x^2 - 2\sqrt{3}\,xy + 5y^2 = 1\}$$

esboçando-o.

Solução: A equação $7x^2 - 2\sqrt{3}xy + 5y^2 = 1$

pode ser escrita como $[x\ y]\underbrace{\begin{bmatrix} 7 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 5 \end{bmatrix}}_{A}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 1.$

A matriz A é simétrica

e portanto diagonalizável

Autovalores: $\lambda_1 = 4, \ \lambda_2 = 8$

Autovetores: associados a $\lambda_1 = 4$: $(t, t\sqrt{3}), \ t \neq 0$

associados a $\lambda_2 = 8$: $(t\sqrt{3}, -t), \ t \neq 0$

Base ortonormal de $\mathbb{R}^2$: $\beta = \left\{\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)\right\}$

Portanto: $$\begin{bmatrix} 7 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 5 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{bmatrix}}_{P}\underbrace{\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}}_{D}\underbrace{\begin{bmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{bmatrix}}_{P^{-1} = P^T}$$

Assim:

$$[x\ y]\begin{bmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 1 \quad \bigstar$$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^2, CAN \arrow[r, "A"] \arrow[d, "P^T"'] & \mathbb{R}^2, CAN \\
\mathbb{R}^2, \beta \arrow[r, "D"] & \mathbb{R}^2, \beta \arrow[u, "P"']
\end{tikzcd}$$

Denote $\beta = \{v_1, v_2\}$

Observe que:

a) $P = [Id]_{CAN \leftarrow \beta}$, $P^T = [Id]_{\beta \leftarrow CAN}$.

Portanto, se $u \in \mathbb{R}^2$ tem coordenadas

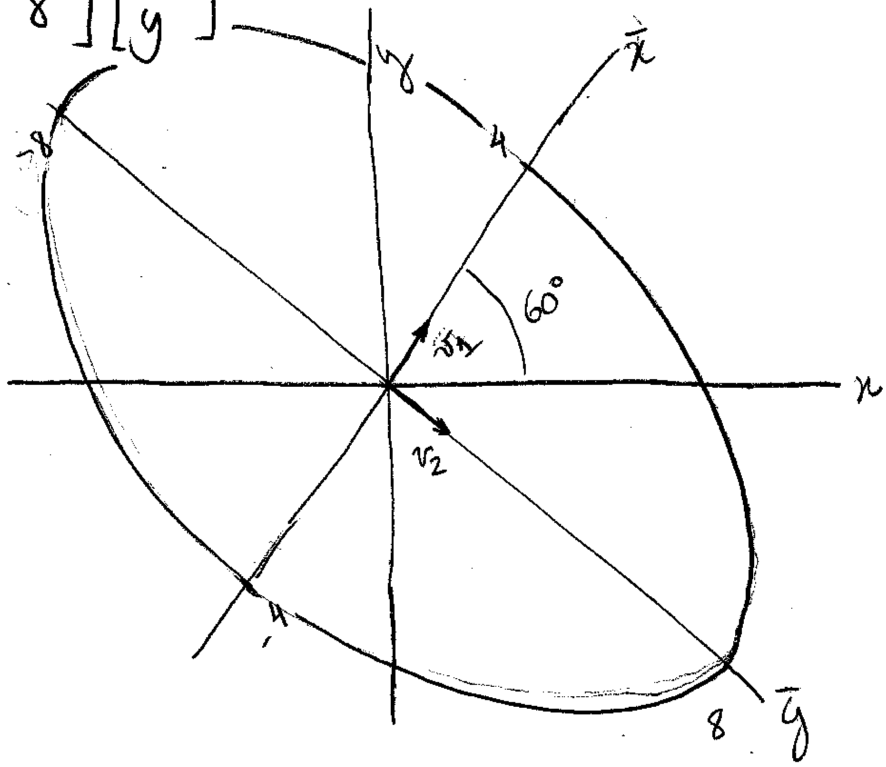
$$u = x(1,0) + y(0,1) \quad e \quad u = \bar{x} v_1 + \bar{y} v_2 ,$$

então $P^T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{bmatrix}$ e $P \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$. Então

a equação ⊛ pode ser escrita como

$$\begin{bmatrix} \bar{x} & \bar{y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{bmatrix} = 1 \text{ , ou ainda:}$$

$$\boxed{4\bar{x}^2 + 8\bar{y}^2 = 1}$$



2) (Cálculo IV e outros) Cálculo funcional de matrizes: dada $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ e $A \in M_{m \times m}$, como definir $f(A)$? Em cálculo IV, em qual $f(x) = e^x$ (soluções de sistemas de Eq. diferenciais) ou $f(x) = x^n$ (soluções de sistemas de Eq. de diferenças).

Ex: Encontrar seqüências $x_n, y_n \in \mathbb{R}$ tais que

$$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix}, \text{ com } x_0, y_0 \text{ dados.}$$

A solução é $\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} = A^n \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$. Como calcular A^n?

Autovalores: $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 2$.

Autovetores: $(1,0)$ e $(1,3)$. Portanto

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1/3 \\ 0 & 1/3 \end{bmatrix} = PDP^{-1}$$

Então

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^n = (PDP^{-1}) \cdot \cdots \cdot (PDP^{-1})$$

$$= PD^nP^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1/3 \\ 0 & 1/3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (-1)^n & \frac{(-1)^{n+1}}{3} + \frac{2^n}{3} \\ 0 & 2^n \end{bmatrix} \qquad \blacksquare$$