Aula 26 (13/11)

Pergunta: Como encontrar autovalores e autovetores?

Sol: Dada $T: U \to U$, queremos encontrar $\lambda \in \mathbb{R}$ e $u \in U$ não nulo tais que $T(u) = \lambda u$.

Equivalentemente, queremos $\lambda \in \mathbb{R}$ e $u \neq 0$ tais que

$$T(u) - \lambda u = 0, \quad \text{ou ainda:}$$

$$\boxed{(T - \lambda Id)u = 0}$$

Em outras palavras, T possui autovalores e autovetores se, e somente se, a transformação linear $S: U \to U$ dada por $S(u) = (T - \lambda Id)u$ não é injetiva!

Isso é possível se, e somente se, $\det(S) = 0$. Portanto, $\lambda \in \mathbb{R}$ é autovalor de T se, e somente se,

$$\boxed{\det(T - \lambda Id) = 0}$$

Lembre-se que $\det(S) = \det[S]_\beta$ para qualquer escolha de base β. Então $\lambda \in \mathbb{R}$ é autovalor de T se, e somente se,

$$\det\left([T]_\beta - \lambda[Id]_\beta\right) = 0$$

Mas como $[Id]_\beta = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix} = Id$, então $\lambda \in \mathbb{R}$

é autovalor de T se, e somente se, λ é raiz do polinômio

$$\boxed{\det\left([T]_\beta - \lambda . Id\right) = 0}$$ ← polinômio característico de T

Em suma: os autovalores de T são exatamente as raízes do polinômio característico de T.

<u>Exemplo:</u> Encontre, se houverem, os autovalores de $T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $T(x,y) = (x-2y, -2x+y)$

<u>Sol:</u> Primeiro, escolhamos uma base. Como temos explicitamente a expressão de T, consideraremos $\mathcal{E} = \{(1,0),(0,1)\}$.

Vamos determinar $[T]_\mathcal{E}$:

$T(1,0) = (1,-2)$; $T(0,1) = (-2,1) \Rightarrow [T]_\mathcal{E} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$.

O polinômio característico é

$$\det\left(\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \det\begin{bmatrix} 1-\lambda & -2 \\ -2 & 1-\lambda \end{bmatrix}$$

$$= (1-\lambda)^2 - 4,$$ cujas raízes

são $\boxed{\lambda_1 = 3}$ e $\boxed{\lambda_2 = -1}$.

E os autovetores de T?

São exatamente os elementos não nulos de

$\boxed{Nuc(T - \lambda Id)}$ para cada λ autovalor.

1) Como $\lambda_1 = 3$ é autovalor, então deve existir $u = (x,y) \in \mathbb{R}^2$ não nulo tal que $T(x,y) = 3.(x,y)$, ou seja, $(x-2y, -2x+y) = 3.(x,y)$, que é um sistema linear:

$$\begin{cases} x - 2y = 3x \\ -2x + y = 3y \end{cases} \iff \begin{cases} -2x - 2y = 0 \\ -2x - 2y = 0 \end{cases}$$

(Note que as linhas são LD. E tinham que ser mesmo!).

As soluções são da forma $u = (x,x) = x(1,1)$. Então o vetor $u = (1,1)$ é <u>um</u> autovetor associado a $\lambda_1 = 3$.

2) Analogamente, como $\lambda_2 = -1$, queremos encontrar $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tal que $T(x,y) = (x-2y, -2x+y) = -(x,y)$, ou seja,

$$\begin{cases} 2x - 2y = 0 \\ -2x + 2y = 0 \end{cases} \iff u = (x,-x) = x(1,-1)$$

Portanto, <u>um</u> autovetor associado a $\lambda_2 = 3$ é $(1,-1)$.

<u>Exercício</u>: seja $\beta = \{(1,1),(1,-1)\}$. Encontre $[T]_\beta$ com T a transformação do exemplo anterior.

<u>Sol</u>: Como $T(1,1) = 3.(1,1) = 3.(1,1) + 0.(1,-1)$

e $T(1,-1) = -1(1,1) = 0.(1,1) - 1(1,-1)$

então $[T]_\beta = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. Seja $\varepsilon = \{(1,0),(0,1)\}$

Vamos calcular $[Id]_{\varepsilon \leftarrow \beta}$:

$$\left.\begin{array}{l} Id(1,1) = (1,1) = 1.(1,0) + 1.(0,1) \\ Id(1,-1) = (1,-1) = 1(1,0) + (-1)(0,1) \end{array}\right\} \Rightarrow [Id]_{\varepsilon \leftarrow \beta} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

as colunas são os autovetores!

Vamos calcular $[Id]_{\beta \leftarrow \varepsilon}$:

$$\left.\begin{array}{l} Id(1,0) = (1,0) = \frac{1}{2}(1,1) + \frac{1}{2}(1,-1) \\ Id(0,1) = (0,1) = \frac{1}{2}(1,1) - \frac{1}{2}(1,-1) \end{array}\right\} \Rightarrow [Id]_{\beta \leftarrow \varepsilon} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}$$

Portanto:

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{✪}$$

<u>Def</u>: $A, B \in M_{n \times n}$ são <u>semelhantes</u> se $\exists C \in M_{n \times n}$ inversível <u>tal que</u>

$$\boxed{A = C B C^{-1}}$$

Com essa terminologia, ✪ diz que $[T]_\beta$ é <u>semelhante a uma matriz diagonal</u>.

<u>Exemplo</u>: $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(x,y,z) = (2x+z, -y, 2z)$.

Quais são, se existirem, os autovalores e autovetores?

Sol: Novamente, como a expressão de T é dada explicitamente, considere $\mathcal{E} = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$.

$$[T]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$ Então os autovalores são as raízes do polinômio

$$\det\left(\begin{bmatrix} 2-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{bmatrix}\right) = (2-\lambda)^2 \cdot (-1-\lambda),$$

ou seja, $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -1$.

Calculando os autovetores:

$\boxed{p/\ \lambda_1 = 2}$ $T(x,y,z) = 2(x,y,z)$

$$(2x+z, -y, 2z) = (2x, 2y, 2z)$$

$$\begin{cases} 2x + z = 2x \\ -y = 2y \\ 2z = 2z \end{cases} \Rightarrow z = y = 0,\ x \in \mathbb{R}$$

Autovetor: $\boxed{v = (1,0,0)}$
ASSOC. a 2

$\boxed{p/\ \lambda_2 = -1}$ $T(x,y,z) = -1\,(x,y,z)$

$$(2x+z, -y, 2z) = (-x, -y, -z)$$

$$\begin{cases} 2x + z = -x \\ -y = -y \\ 2z = -z \end{cases} \Longrightarrow x = z = 0,\ y \in \mathbb{R}$$

Autovetor: $\boxed{w = (0,1,0)}$
ASSOC. a -1

<u>Obs.:</u> diferentemente do exemplo anterior, os autovetores <u>não formam uma base do domínio</u>.

Note que $W = \text{span}\{(1,0,0),(0,1,0)\}$ é um espaço invariante para T, pois

$$T(a(1,0,0)+b(0,1,0)) = aT(1,0,0)+bT(0,1,0)$$
$$= 2a(1,0,0) - b(0,1,0) \in W.$$

<u>Exercício</u>: Verifique que $S = \text{span}\{(1,0,0),(0,0,1)\}$ é invariante para T.