Aula 21 (28/10) 

# Mínimos quadrados e Aplicações

Pergunta: quando um sistema linear $AX = b$ possui alguma solução $X_0$?

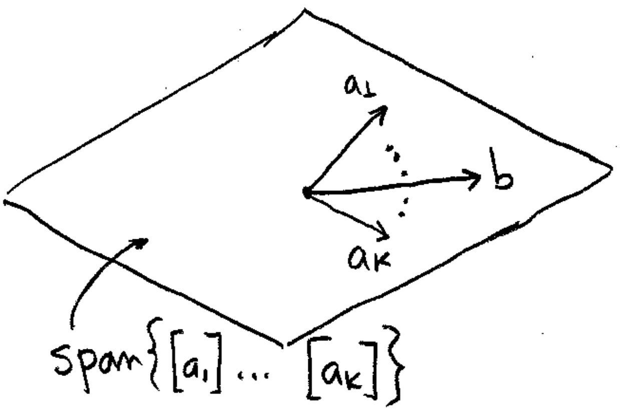
Considere $A = \begin{bmatrix} | & & | \\ a_1 & \cdots & a_k \\ | & & | \end{bmatrix}_{k \times n}$, onde $a_j \in M_{k \times 1}$ são as colunas de $A$.

Exercício: $AX = x_1 \begin{bmatrix} | \\ a_1 \\ | \end{bmatrix} + \cdots + x_n \begin{bmatrix} | \\ a_k \\ | \end{bmatrix}$. ▪

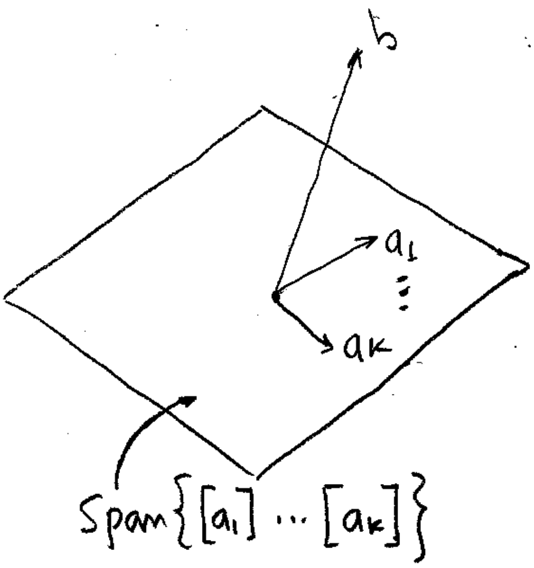
Então

$$\boxed{AX = b \text{ tem solução} \iff b \in \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} | \\ a_1 \\ | \end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix} | \\ a_n \\ | \end{bmatrix} \right\}}$$

Geometricamente:

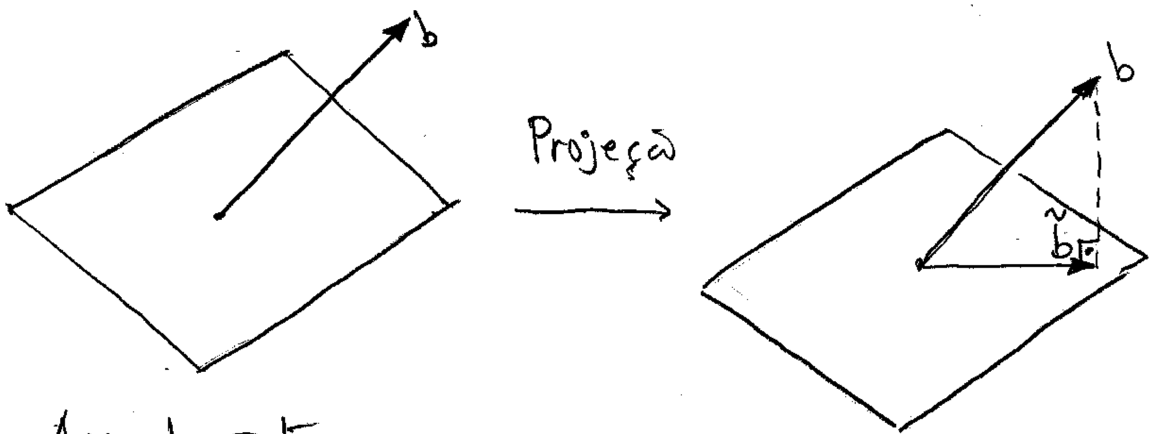



$AX = b$ tem solução




$Ax = b$ ñ tem solução.

Podemos "resolver" o sistema $Ax = b$ se $b \notin \text{span}\left\{\begin{bmatrix} | \\ a_1 \\ | \end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix} | \\ a_k \\ | \end{bmatrix}\right\}$? Não, mas uma alternativa é: calcular a proj ortogonal de $b$ em $\text{span}\left\{\begin{bmatrix} | \\ a_1 \\ | \end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix} | \\ a_k \\ | \end{bmatrix}\right\}$:



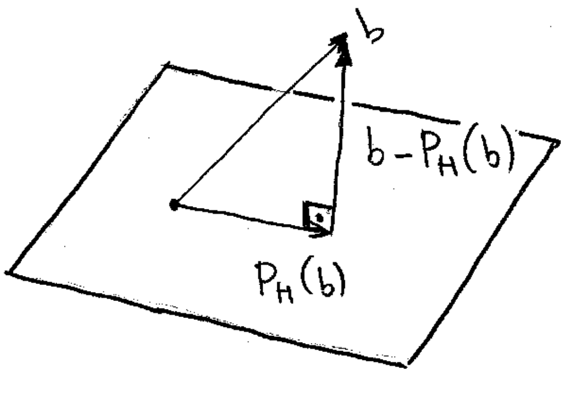

$Ax = b$ ñ tem solução

$Ax = \tilde{b}$ tem solução!

Vamos deduzir um método p/ resolver $Ax = \tilde{b}$, sem precisar calcular $\tilde{b}$ explicitamente!

Dedução do Metodo: seja $H = \text{span}\left\{\begin{bmatrix} | \\ a_1 \\ | \end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix} | \\ a_k \\ | \end{bmatrix}\right\}$.

1) $\tilde{b} = P_H(b)$. Note que $b - P_H(b) \in H^\perp$.




2) $b - P_H(b) \in H^\perp$ se e somente se $A^T(b - P_H(b)) = 0$, pois as linhas de $A^T$ são as colunas de $A$, que geram $H$.

3) Então $A^T P_H(b) = A^T b$. ⊛

4) Se $x_0$ é solução de $Ax = P_H(b)$, então ao substituir isso na equação ⊛, deduzimos que $x_0$ é solução de

$$\boxed{A^T A x = A^T b}$$

esse sistema é conhecido como "sistema de equações normais".

Mas observe: se $x_0$ é solução de $Ax = P_H(b)$, então $x_0$ é solução de $A^T A x = A^T b$.

Será que vale a recíproca?

Teorema (Método dos mínimos quadrados). Se $x_0$ é solução de $A^T A x = A^T b$, então $x_0$ é solução de $Ax = P_H(b)$.

Dem: Vamos provar que $Ax_0 = P_H(b)$. Como $A^T A x_0 = A^T b$, então $A^T(Ax_0 - b) = 0$ e portanto $Ax_0 - b \in H^\perp$. Logo, $P_H(Ax_0 - b) = 0$.

Assim: $P_H(Ax_0) - P_H(b) = 0$

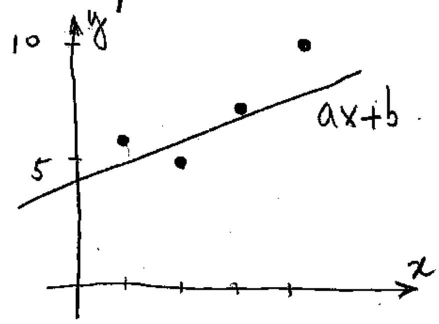
$P_H(Ax_0) = P_H(b)$. Como $Ax_0 \in H$,

$Ax_0 = P_H(Ax_0) = P_H(b)$ ■

# Exemplos / Aplicações

1) Ajuste de uma reta a um conjunto de dados.

Encontrar a função afim que melhor se ajusta aos pontos $(1,6)$, $(2,5)$, $(3,7)$, $(4,10)$.




Sol: não há uma função $f(x) = ax+b$ cujo gráfico passe pelos 4 pontos. Em outras palavras, o sistema
$$\begin{cases} a+b=6 \\ 2a+b=5 \\ 3a+b=7 \\ 4a+b=10 \end{cases}$$
não tem solução. Vamos encontrar uma solução de mínimos quadrados.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 6 \\ 5 \\ 7 \\ 10 \end{bmatrix}}_{b} \Longrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 30 & 10 \\ 10 & 4 \end{bmatrix}}_{A^TA} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 77 \\ 28 \end{bmatrix}}_{A^Tb}$$

Conta, conta, conta ... $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7/5 \\ 7/2 \end{bmatrix} \Rightarrow f(x) = \dfrac{7x}{5} + \dfrac{7}{2}$ ∎

2) Encontre o ponto do plano
$H = \text{span}\{(1,2,1),(0,1,-1)\}$ mais próximo do ponto $(-2,1,4)$.

Observe que $(-2,1,4) \notin H$, ou seja, o sistema $s(1,2,1) + t(0,1,-1) = (-2,1,4)$ não tem solução. Vamos encontrar a projeção ortogonal de $(-2,1,4)$ em $H$ usando mínimos quadrados:

a) Seja $b = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$. Procuramos $\tilde{b} = P_H\left(\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}\right)$.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}}_{b} \implies \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Conta, conta, conta... $\implies \begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = X_0$

b) Como $X_0$ é solução de $AX = \tilde{b}$ com $\tilde{b} = P_H\left(\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}\right)$, então $\tilde{b} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$ ∎

Por que "mínimos quadrados"?

**Teorema:** Seja $H \subset \mathbb{R}^n$ subespaço e $b \notin H$. Então

$$d(b, P_H(b)) \leq d(b, v) \quad \forall v \in H$$

**Dem:** Em passos:

- Note que $b - P_H(b) \in H^\perp$,

pois $Nuc(P_H) = H^{\perp}$ e $P_H(b - P_H(b)) =$

$= P_H(b) - P_H(P_H(b)) = P_H(b) - P_H(b) = 0$.

- $\forall v \in H$, temos que $v - P_H(b) \in H$, pois $P_H(b) \in H$ e $H$ é subespaço.

- Portanto, $\langle b - P_H(b), v - P_H(b) \rangle = 0 \quad \forall v \in H$

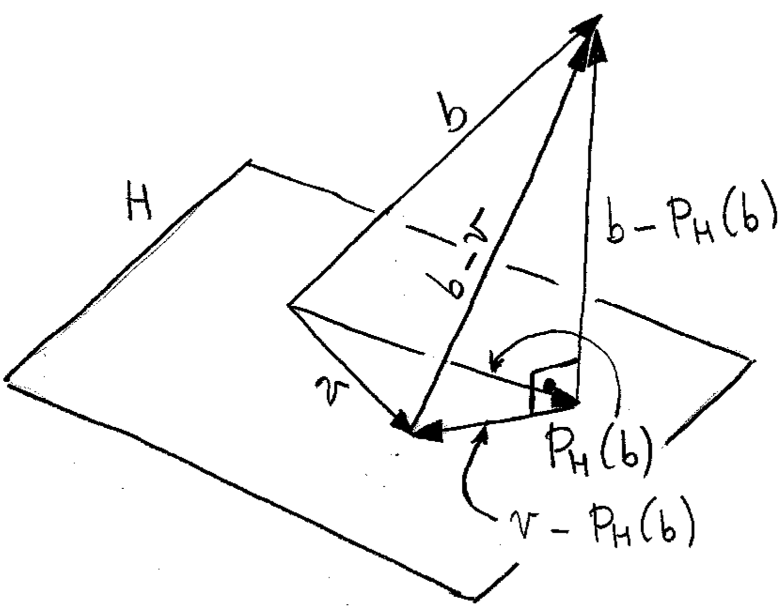
- Da lei dos cossenos, temos então (ver figura abaixo)

$$\| b - v \|^2 = \| b - P_H(b) \|^2 + \| v - P_H(b) \|^2$$

$$\geq \| b - P_H(b) \|^2 \text{ e portanto}$$

$$d^2(b, v) \geq d^2(b, P_H(b)), \quad \forall v \in H.$$

Concluímos então que $d(b,v) \geq d(b, P_H(b))$ $\forall v \in H$. ▪



Note que, portanto, $P_H(b)$ é o vetor de $H$ mais próximo de $b$ dentre todos os vetores de $H$. Em outras palavras, se considerarmos

$$f: H \longrightarrow \mathbb{R} \text{ dada por}$$
$$f(v) = d(v, b),$$

o mínimo de $f$ é atingido em $P_H(b)$. Mas para provar o teorema anterior, usamos $f^2(v) = d^2(v, b)$, pois é mais fácil trabalhar com $\|\cdot\|^2$ do que com $\|\cdot\|$. (por isso "mínimos quadrados").

Conclusão: ao encontrar soluções para $A^TAX = A^Tb$, estamos encontrando $X_0$ tal que <u>$AX_0$ é o vetor de $H$ mais próximo de $b$.</u>