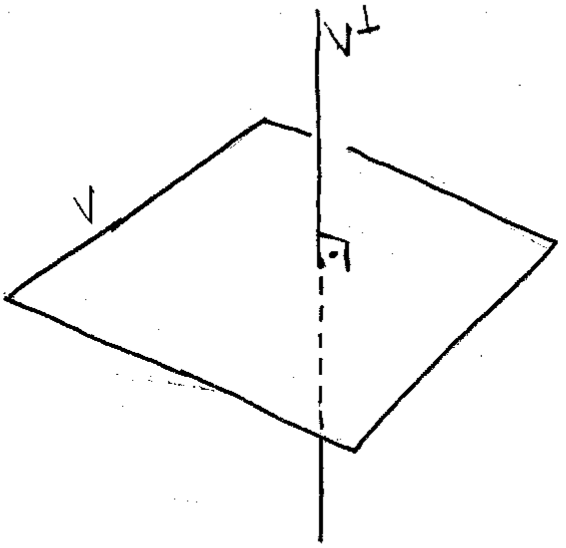
Aula 20 (23/10)

Projeções e Reflexões

Def: Seja $V \subset \mathbb{R}^n$ um subespaço vetorial. O complemento ortogonal de V é o conjunto

$$V^\perp = \{ w \in \mathbb{R}^n / \langle v, w \rangle = 0 \quad \forall v \in V \}$$



Teorema: $V^\perp$ é subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$.

Dem: • $0 \in V^\perp$, pois $\forall v \in V$, temos $\langle v, 0 \rangle = 0$.

• $w, \bar{w} \in V^\perp \Rightarrow w + \bar{w} \in V^\perp$, pois $\forall v \in V$, temos $\langle v, w + \bar{w} \rangle = \cancel{\langle v, w \rangle} + \cancel{\langle v, \bar{w} \rangle} = 0$

• $\lambda \in \mathbb{R}$, $w \in V^\perp \Rightarrow \lambda w \in V^\perp$, pois $\forall v \in V$ temos $\langle v, \lambda w \rangle = \lambda \langle v, w \rangle = 0$ ■

Pergunta: dado $V \subset \mathbb{R}^n$ subespaço, como encontrar um conjunto gerador para $V^\perp$?

Teorema: dado $V \subset \mathbb{R}^n$, $\{v_1, \dots, v_k\}$ base de V, então

$$V^\perp = \{ w \in \mathbb{R}^n / \langle w, v_1 \rangle = \dots = \langle w, v_k \rangle = 0 \}$$

Dem: exercício. Há duas coisas a fazer.

1) $V^{\perp} \subset \{w \in \mathbb{R}^n / \langle w, v_1 \rangle = \cdots = \langle w, v_k \rangle = 0\}$

2) $V^{\perp} \supset \{w \in \mathbb{R}^n / \langle w, v_1 \rangle = \cdots = \langle w, v_k \rangle = 0\}$.

Conseqüência: para encontrar o complemento ortogonal de V:

1) Ache uma base de V: $v_1, \ldots, v_k$,

2) Resolva o sistema linear $\begin{cases} \langle v_1, x \rangle = 0 \\ \vdots \\ \langle v_k, x \rangle = 0 \end{cases}$

onde $x = (x_1, \ldots, x_n)$

Exemplo 1: $H = \text{span}\{(1,2,3,4), (-1,2,-3,4)\}$, encontrar $H^{\perp}$.

Sol: $\begin{array}{l} \langle (1,2,3,4), (x,y,z,w) \rangle = 0 \\ \langle (-1,2,-3,4), (x,y,z,w) \rangle = 0 \end{array} \iff \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & -3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & -3 & 4 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 0 & 8 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$\therefore \begin{array}{l} x + 2y + 3z + 4w = 0 \\ \quad\;\; y \qquad\;\; + 2w = 0 \end{array} \Rightarrow y = -2w, \; x = -3z$ e portanto

$$H^{\perp} = \text{span}\{(-3,0,1,0), (0,-2,0,1)\}. \quad ■$$

Observe que $\dim H + \dim H^{\perp} = 2 + 2 = 4 = \dim \mathbb{R}^4$.

Isso não é coincidência.

<u>Teorema</u>: Seja $V \subset \mathbb{R}^n$ subespaço. Se $\dim V = k$, então $\dim V^\perp = n-k$.

<u>Dem</u>: Seja $\{v_1, \dots, v_k\}$ uma base de V. Então o sistema linear $\begin{cases} \langle v_1, x \rangle = 0 \\ \quad \vdots \\ \langle v_k, x \rangle = 0 \end{cases}$ tem k equações LI's. Portanto, o número de variáveis livres é $n-k$. ∎

<u>Observação</u>: $V \cap V^\perp = \{0\}$. Realmente: considere $w \in V \cap V^\perp$. Então $\langle w, v \rangle = 0 \ \forall v \in V$. Mas como $w \in V$, $\langle w, w \rangle = 0$ e então $w = 0$.

Conseqüência <u>IMPORTANTE</u>:

$$\boxed{\mathbb{R}^n = V \oplus V^\perp}$$

Além disso, se $\{v_1, \dots, v_k\}$ base de V e $\{v_{k+1}, \dots, v_n\}$ base de $V^\perp$, $\{v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n\}$ é base de $\mathbb{R}^n$.

<u>Projeções e Reflexões</u>

Seja $V \subset \mathbb{R}^n$ um subespaço e $V^\perp$ seu complemento ortogonal.

<u>Def</u>: $P_V : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ dada por $\begin{cases} P(v) = v, & v \in V \\ P(v) = 0, & v \in V^\perp \end{cases}$

é chamada <u>projeção ortogonal em V</u>.

$R_V : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ dada por $\begin{cases} R_V(v) = v, & v \in V \\ R_V(v) = -v, & v \in V^\perp \end{cases}$

é chamada <u>reflexão ortogonal em torno de V</u>.

<u>Obs</u>: lembre-se que para definir uma T.L., basta defini-la na base do $\mathbb{R}^n$; em outras palavras, podemos definir $P_V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ por $P(v_i) = v_i$ para $i = 1, \dots, k$ e $P_V(v_i) = 0$ para $i = k+1, \dots, n$. Analogamente para R_H.

<u>Exemplo 2</u>: Determinar $P_H : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ onde H é o plano $x - y + z = 0$

<u>Sol</u>: Uma base de H: $\{(1,0,-1), (1,1,0)\}$

Base de $H^\perp$: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x = -y = z$.

$\therefore H^\perp = \text{span}\{(1,-1,1)\}$.

Então: $\mathbb{R}^3 = \text{span}\{(1,0,-1), (1,1,0)\} \oplus \text{span}\{(1,-1,1)\}$.

Defina: $P_H(1,0,-1) = (1,0,-1)$

$P_H(1,1,0) = (1,1,0)$

$P_H(1,-1,1) = (0,0,0)$

Se $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, então (exercício):

$$(x,y,z) = \left(\frac{x-y-2z}{3}\right)(1,0,-1) + \left(\frac{x+2y+z}{3}\right)(1,1,0) + \left(\frac{x-y+z}{3}\right)(1,-1,1)$$

Aplicando P_H e usando que $P_H(1,-1,1) = (0,0,0)$:

$$P_H(x,y,z) = \left(\frac{2x+y-z}{3}, \frac{x+2y+z}{3}, \frac{-x+y+2z}{3}\right)$$

Observe que: se $\beta = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ e
$\gamma = \{(1,0,-1),(1,1,0),(1,-1,1)\}$ então

$$[P_H]_\beta = \begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 & -1/3 \\ 1/3 & 2/3 & 1/3 \\ -1/3 & 1/3 & 2/3 \end{bmatrix} \text{ e } [P_H]_\gamma = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(bem mais simples que $[P_H]_\beta$).

Note que: $Nuc(P_H) = H^\perp$ e
$Im(P_H) = H$

Exemplo 3: $R_H : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $H = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x + 2y = 0\}$

Sol: $H = span\{(-2,1)\}$, $H^\perp = span\{(1,2)\}$.

Então defina $R_H(-2,1) = (-2,1)$ e
$R_H(1,2) = (-1,-2)$

Dado $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $(x,y) = \left(\frac{-2x+y}{5}\right)(-2,1) + \left(\frac{x+2y}{5}\right)(1,2)$.

Aplicando R_H, obteremos:

$$R_H(x,y) = \left(\frac{3x-4y}{5} , \frac{-6x-3y}{5} \right).$$

Agora, $Nuc(R_H) = \{(0,0)\}$ e $Im(R_H) = \mathbb{R}^2$.

Se considerarmos $\beta = \{(1,0),(0,1)\}$, $\gamma = \{(-2,1),(1,2)\}$, então

$$[R_H]_\beta = \begin{bmatrix} 3/5 & -4/5 \\ -6/5 & -3/5 \end{bmatrix} \text{ enquanto } [R_H]_\gamma = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

■