Aula 23 (03/11)

Determinantes.

Pergunta: quando $\begin{cases} ax + by = 0 \\ cx + dy = 0 \end{cases}$ tem solução única?

$$\left[\begin{array}{cc|c} a & b & 0 \\ c & d & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} -ac & -bc & 0 \\ ac & ad & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} -ac & -bc & 0 \\ 0 & \underbrace{ad-bc} & 0 \end{array}\right]$$

$$(ad-bc)y = 0$$

Então:

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{a solução é única} \\ \text{se, e somente se,} \\ \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \neq 0 \end{array}}$$

Notação

conclusão

Pergunta: quando $\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = 0 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = 0 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = 0 \end{cases}$ tem solução única?

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{escalona}} \left[\begin{array}{ccc|c} \# & \# & \# & 0 \\ 0 & \# & \# & 0 \\ 0 & 0 & B & 0 \end{array}\right] \text{ onde}$$

$$B = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

$$= a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Então: $\boxed{\text{a solução é única se e só se } B \neq 0}$

Descobrimos que existe $f: M_{2\times2} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(A) = 0$ se, e somente se, $AX = 0$ tem infinitas soluções:

$$f: M_{2\times2} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$f\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = ad - bc$$

Analogamente: $g: M_{3\times3} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$g\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}\right) = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

tem a mesma propriedade: $g(A) = 0$ se e só se $AX = 0$ tem infinitas soluções.

Exemplo 1: $f(Id) = 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 1$

$g(Id) = 1$ (por quê?)

Em outras palavras, f e g "detectam" sistemas homogêneos possíveis e indeterminados 2×2 e 3×3 respectivamente. A existência de funções que fazem isso não é privilégio de $M_{2\times2}$ e $M_{3\times3}$.

Teorema (Expansão de Laplace): Considere as funções $f_n: M_{n\times n} \longrightarrow \mathbb{R}$ definidas da seguinte forma:

1) para $n=2$: $f_2\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\right) = a_{11}\cdot a_{22} - a_{12}\cdot a_{21}$.

2) para $n \geq 3$. Seja $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$. Denote por M_{KS} a matriz $(n-1)\times(n-1)$ cujas entradas são a_{ij} com $i \neq k$ e $j \neq s$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,s} & a_{1,s+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{k,s} & a_{k,s+1} & \cdots & a_{kn} \\ a_{k+1,1} & \cdots & a_{k+1,s} & a_{k+1,s+1} & \cdots & a_{k+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ns} & a_{n,s+1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Definimos

$$\boxed{f_n(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{k+j} f_{n-1}(M_{kj})}$$

Obs: a matriz M_{KS} é a matriz A "sem a linha k e sem a coluna s". (por isso $M_{KS} \in M_{(n-1)\times(n-1)}$).

Para cada $n \in \mathbb{N}$, as funções f_n definidas acima tem as seguintes propriedades:

a) $f_n(Id) = 1$.

b) $f_n(A) = 0$ se e somente se A tem colunas LD.

c) f_n é linear em cada coluna de A, ou seja:

- se $A = \begin{bmatrix} | & & | & & | \\ a_1 & \cdots & a_k + \tilde{a}_k & \cdots & a_n \\ | & & | & & | \end{bmatrix}$ então

$$f_n(A) = f_n\left(\begin{bmatrix} | & & | & & | \\ a_1 & \cdots & a_k & \cdots & a_n \\ | & & | & & | \end{bmatrix}\right) + f_n\left(\begin{bmatrix} | & & | & & | \\ a_1 & \cdots & \tilde{a}_k & \cdots & a_n \\ | & & | & & | \end{bmatrix}\right)$$

- se $A = \begin{bmatrix} | & & | & & | \\ a_1 & \cdots & \alpha a_k & \cdots & a_n \\ | & & | & & | \end{bmatrix}$ com $\alpha \in \mathbb{R}$, então

$$f_n(A) = \alpha \cdot f_n\left(\begin{bmatrix} | & & | & & | \\ a_1 & \cdots & a_k & \cdots & a_n \\ | & & | & & | \end{bmatrix}\right). \qquad \blacksquare$$

Definição: Para cada $n \in \mathbb{N}$, a função $f_n : M_{n\times n} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida pelo teorema acima é o determinante de ordem n. O número real $f_n(A)$ é o determinante da matriz A. Notação:

$$\boxed{f_n(A) = \det(A)}$$

Exercício: Mostre que as propriedades a, b, c acima são satisfeitas para f_2.

Exemplo 2: Os vetores $(1,0,1), (1,2,1), (0,1,2)$ são LI's?

Sol: $x(1,0,1) + y(1,2,1) + z(0,1,1) = (0,0,0)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad \text{Sendo } A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix},$$

usando Laplace com $k=2$:

$$\det(A) = (-1)^{2+1} \cdot 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{2+2} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{2+3} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$= (-1\cdot 0\cdot 2) + (1\cdot 2\cdot 2) + (-1\cdot 1\cdot 0) = 4 \neq 0$

Portanto as colunas de A ñ são LD, ou seja, são LI's.

<u>Algumas propriedades dos determinantes</u>:

1) $\det\left(\begin{bmatrix} \cdots & | & \cdots & | & \cdots \\ & a_k & \cdots & a_s & \\ & | & & | & \end{bmatrix}\right) = -\det\left(\begin{bmatrix} \cdots & | & \cdots & | & \cdots \\ & a_s & \cdots & a_k & \\ & | & & | & \end{bmatrix}\right)$

<u>Dem</u>: caso $n=2$ (os casos $n \geqslant 3$ são semelhantes).

$$\underbrace{\det\begin{bmatrix} | & | \\ u+v & u+v \\ | & | \end{bmatrix}}_{=0} = \underbrace{\det\begin{bmatrix} | & | \\ u & u \\ | & | \end{bmatrix}}_{=0} + \det\begin{bmatrix} | & | \\ u & v \\ | & | \end{bmatrix} + \det\begin{bmatrix} | & | \\ v & u \\ | & | \end{bmatrix} + \underbrace{\det\begin{bmatrix} | & | \\ v & v \\ | & | \end{bmatrix}}_{=0}$$

$$\Longrightarrow \det\begin{bmatrix} | & | \\ u & v \\ | & | \end{bmatrix} = -\det\begin{bmatrix} | & | \\ v & u \\ | & | \end{bmatrix}. \qquad \blacksquare$$

2) $\det(A) = \det(A^T)$.

<u>Dem</u>: não provaremos essa propriedade, mas ela pode ser "justificada" observando que ela vale para $M_{2\times 2}$ e, como a fórmula de Laplace depende no final de determinantes 2×2, é razoável esperar que $\det(A) = \det(A^T)$ para $A \in M_{n\times n}$ e não só p/ $A \in M_{2\times 2}$. $\blacksquare$

<u>Exercício</u>: Mostre que $\det(A) = \det(A^T)$ para $A \in M_{2\times 2}$.

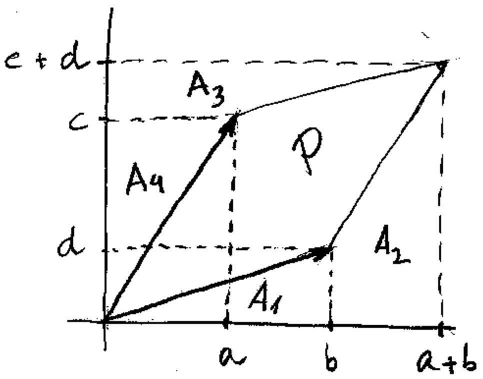
Como consequência da propriedade 2):

3) • det é linear nas linhas da matriz

- $\det(A) = 0$ se, e somente se, as linhas de A são LD.
- det troca de sinal ao trocar linhas da matriz.

<u>Uma interpretação geométrica para o determinante.</u>

Seja $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ e $u = (a,c)$, $v = (b,d)$



$$\text{Área}(P) = (a+b)\cdot(c+d) - A_1 - A_2 - A_3 - A_4$$

Mas $A_1 = \dfrac{b \cdot d}{2}$,

$$A_2 = \left(\frac{2d+c}{2}\right) \cdot a,$$

$A_3 = \left(\dfrac{2a+b}{2}\right) \cdot d$, $A_4 = \dfrac{a \cdot c}{2}$. Logo,

$$\text{Área}(P) = (a+b)\cdot(c+d) - A_1 - A_2 - A_3 - A_4 = ac - bd = \det\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$