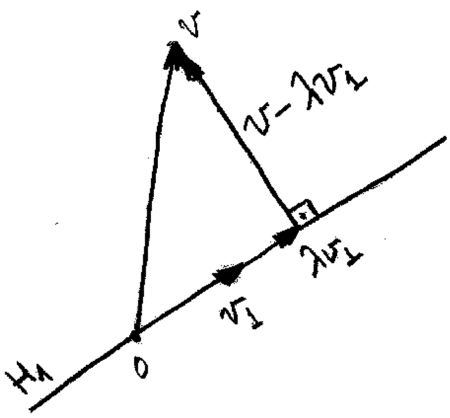
Aula 22 (30/10) <u>REVISADO</u>

Processo de Ortogonalização de Gram-Schimidt.

Uma alternativa para definir projeções ortogonais:

1) Fixe $v_1 \in \mathbb{R}^n$ não nulo e $H_1 = \text{span}\{v_1\}$. Dado $v \in \mathbb{R}^n$, vamos calcular $P_{H_1}(v)$ de maneira alternativa: encontrando $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ tal que $\langle v - \lambda v_1, v_1 \rangle = 0$ (ver figura)



$$\langle v - \lambda v_1, v_1 \rangle = 0 \iff$$

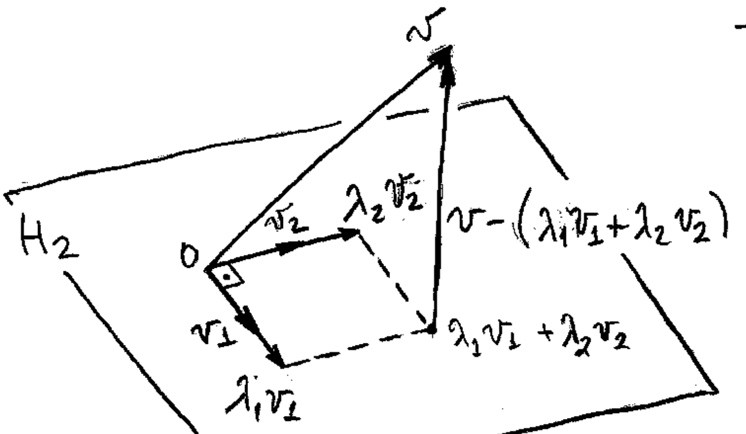
$$\langle v, v_1 \rangle - \lambda \langle v_1, v_1 \rangle = 0 \iff$$

$$\boxed{\lambda = \frac{\langle v, v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle}}$$

. Portanto,

$$\boxed{P_{H_1}(v) = \frac{\langle v, v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} \cdot v_1}$$

2) Fixe $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n$ não nulos ortogonais e $H_2 = \text{span}\{v_1, v_2\}$. Dado $v \in \mathbb{R}$, vamos "copiar" o argumento acima e calcular $P_{H_2}(v)$: encontrar $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tais que



$$\langle v - (\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2), v_1 \rangle = 0$$

$$\langle v - (\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2), v_2 \rangle = 0$$

Então: $\langle v, v_1\rangle - \lambda_1\langle v_1, v_1\rangle - \lambda_2 \underbrace{\cancel{\langle v_2, v_1\rangle}}_{=0} = 0$

$$\Longrightarrow \boxed{\lambda_1 = \frac{\langle v, v_1\rangle}{\langle v_1, v_1\rangle}}$$ e analogamente

$$\langle v, v_2\rangle - \lambda_1 \underbrace{\cancel{\langle v_1, v_2\rangle}}_{=0} - \lambda_2\langle v_2, v_2\rangle = 0$$

$$\Longrightarrow \boxed{\lambda_2 = \frac{\langle v, v_2\rangle}{\langle v_2, v_2\rangle}}.$$ Portanto:

$$\boxed{P_{H_2}(v) = \frac{\langle v, v_1\rangle}{\langle v_1, v_1\rangle}\cdot v_1 + \frac{\langle v, v_2\rangle}{\langle v_2, v_2\rangle}\cdot v_2}$$

O padrão da fórmula parece ficar claro...

3) Fixe $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$ <u>não nulos ortogonais</u> e $H_k = \operatorname{span}\{v_1, \dots, v_k\}$. Dados $v \in \mathbb{R}^n$, temos que

$$\boxed{P_{H_k}(v) = \frac{\langle v, v_1\rangle}{\langle v_1, v_1\rangle} v_1 + \dots + \frac{\langle v, v_k\rangle}{\langle v_k, v_k\rangle} v_k}$$

Observe que usamos <u>fortemente</u> o fato de $v_1, \dots, v_k$ serem ortogonais p/ obter essa fórmula. Vamos usar $P_{H_1}, \dots, P_{H_k}$ para construir bases ortogonais.

1') Dados u_1, u_2 LI's, vamos encontrar v_1, v_2 ortogonais tais que $\operatorname{span}\{u_1, u_2\} = \operatorname{span}\{v_1, v_2\}$.

Considere

$$v_1 = u_1$$

$$v_2 = u_2 - P_{H_1}(u_2)$$

onde $H_1 = \text{span}\{v_1\} = \text{span}\{u_1\}$. Temos que v_1, v_2 são ortogonais e como v_2 é C.L. de u_1 e u_2, $\text{span}\{v_1, v_2\} = \text{span}\{u_1, u_2\}$.

<u>Exercício</u>: prove que v_1, v_2 são ortogonais

2') Dados u_1, u_2, u_3 LI's, vamos encontrar v_1, v_2, v_3 ortogonais tais que $\text{span}\{u_1, u_2, u_3\} = \text{span}\{v_1, v_2, v_3\}$.

Considere

$$v_1 = u_1$$

$$v_2 = u_2 - P_{H_1}(u_2), \quad H_1 = \text{span}\{v_1\}$$

$$v_3 = u_3 - P_{H_2}(u_3), \quad H_2 = \text{span}\{v_1, v_2\}$$

Temos v_1, v_2, v_3 ortogonais e como v_2, v_3 são C.L de u_1, u_2, u_3, então $\text{span}\{u_1, u_2, u_3\} = \text{span}\{v_1, v_2, v_3\}$ (por quê?)

<u>Exercício</u>: prove que v_1, v_2, v_3 são ortogonais.

<u>Teorema</u> (processo de Gram-Schmidt). Dados $u_1, \dots, u_K$ LI's, os vetores

$$v_1 = u_1$$

$$v_2 = u_2 - P_{H_1}(u_2)$$

$$\vdots$$

$$v_K = u_K - P_{H_{K-1}}(u_K)$$

são ortogonais e geram o mesmo espaço gerado por $u_1, \dots, u_K$.

<u>Exemplo</u>: Encontre uma base orto<u>NORMAL</u> para o conj.

$$H = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 / x + y - z - w = 0\}$$

<u>Sol</u>: Uma base (não necessariamente ortogonal):

$$x = -y + z + w \Rightarrow H = \text{span}\{\underbrace{(-1,1,0,0)}_{u_1}, \underbrace{(1,0,1,0)}_{u_2}, \underbrace{(1,0,0,1)}_{u_3}\}$$

Vamos usar Gram-Schmidt:

$$v_1 = (-1,1,0,0)$$

$$v_2 = u_2 - P_{H_1}(u_2) = (1,0,1,0) - \frac{\langle (1,0,1,0),(-1,1,0,0)\rangle}{\langle(-1,1,0,0),(-1,1,0,0)\rangle}\cdot(-1,1,0,0)$$

$$= (1,0,1,0) + \frac{1}{2}(-1,1,0,0) = \underbrace{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1,0\right)}_{v_2}$$

$$v_3 = u_3 - P_{H_2}(u_2) =$$

$$= (1,0,0,1) - \frac{\langle(1,0,0,1),(-1,1,0,0)\rangle}{\langle(-1,1,0,0),(-1,1,0,0)\rangle}\cdot(-1,1,0,0) - \frac{\langle(1,0,0,1),(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1,0)\rangle}{\langle(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1,0),(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1,0)\rangle}\cdot\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1,0\right)$$

$$= (1,0,0,1) + \frac{1}{2}(-1,1,0,0) - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1,0\right) = \overbrace{\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},-\frac{1}{3},1\right)}^{v_3}$$

Agora é só normalizar: $\left\{\frac{v_1}{\|v_1\|}, \frac{v_2}{\|v_2\|}, \frac{v_3}{\|v_3\|}\right\}$.