Aula 24 (06/11).

<u>Um exemplo</u>: determinante de matriz triangular.

Seja $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$. Vamos calcular $\det(A)$, usando a fórmula de Laplace:

Como $\det(A) = \det(A^T)$, vamos usar a 1ª coluna p/ a fórmula de Laplace.

$$a_{21} = a_{31} = a_{41} = 0$$

$$\det(A) = 3 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \det \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} + 0 + 0 + 0$$

$$= 3 \cdot \left[2 \cdot (-1)^{1+1} \det \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \right] = 3 \cdot 2 \cdot (-1) \cdot (-3) = 18$$

Na prática, observamos que o determinante, após sucessivas aplicações da fórmula de Laplace, é o <u>produto dos elementos da diagonal</u>. Isso é um fato geral:

<u>Teorema</u>: Se $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{bmatrix}$, então $\det(A) = a_{11} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$. ∎

<u>Obs</u>: Se $A = \begin{bmatrix} a_{11} & & \\ a_{21} & \ddots & 0 \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$, $\det(A) = a_{11} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$ (Por quê?)

Determinantes X operações com matrizes

Sabemos que $\det(A+B) \neq \det(A) + \det(B)$ em geral, pois basta tomar $A = Id$ e $B = -Id$ em $M_{2\times 2}$, por exemplo.

E quanto ao produto de matrizes?

Teorema: Sejam $A, B \in M_{n\times n}$. Então

$$\boxed{\det(A\cdot B) = \det(A)\cdot\det(B)}$$

Não demonstraremos esse fato, mas vamos estudar algumas importantes consequências dele.

Teorema: $A \in M_{n\times n}$ é inversível se, e somente se, $\det(A) \neq 0$.

Dem: ($\Rightarrow$) Se A é inversível, então existe B tal que

$$A\cdot B = Id. \text{ Logo } \det(A).\det(B) = \det(A\cdot B) = \det(Id) = 1$$

e portanto $\det(A) \neq 0$.

($\Leftarrow$) Se $\det(A) \neq 0$, então os sistemas lineares

$AX = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \ldots, AX = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ têm solução. As soluções são exatamente as colunas de A^{-1}.

Exercício: Mostre que se A é inversível, então
$$\det(A^{-1}) = \left[\det(A)\right]^{-1}$$

Relembre que se $T: U \longrightarrow U$ é uma transformação linear e β, γ são bases de U, então

$$[T]_\beta = [Id]_{\beta\leftarrow\gamma}\,[T]_\gamma\,[Id]_{\gamma\leftarrow\beta}.$$

logo,
$$\det [T]_\beta = \det\left([Id]_{\beta\leftarrow\gamma}\cdot[T]_\gamma\cdot[Id]_{\gamma\leftarrow\beta}\right)$$
$$= \det [Id]_{\beta\leftarrow\gamma}\cdot \det [T]_\gamma \cdot \det [Id]_{\gamma\leftarrow\beta}$$
$$=1$$
$$= \det [T]_\gamma.$$

Podemos então definir determinante de uma transf linear usando bases. (qualquer base dará o mesmo det!)

Def: Seja $T: U \longrightarrow U$ uma transf. linear. O determinante de T é o número real

$$\det(T) = \det [T]_\beta$$ (e independe da base β escolhida).

Exemplo 1: $P_H: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a projeção ortogonal em $H = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x-y+z=0\}$. Calcule $\det P_H$.

Sol: $H = \text{span}\{(1,1,0),(1,0,-1)\}$, $H^\perp = \text{span}\{(1,-1,1)\}$.

Considere então $\beta = \{(1,1,0),(1,0,-1),(1,-1,1)\}$. Nesta base, $[P_H]_\beta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ e portanto

$$\det(P_H) = 0. \quad \blacksquare$$

Exemplo: Existe alguma base γ de $\mathbb{R}^3$ tal que

$[P_H]_\gamma = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ para a P_H do exemplo anterior?

Sol: Não, pois $\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = -1 \neq 0$. $\blacksquare$

Def: $A \in M_{n\times n}$ é dita ortogonal se $A^T A = Id$

(noutras palavras: $A^{-1} = A^T$)

Exemplo 2: para cada $\theta \in \mathbb{R}$, $\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ é ortogonal,

pois $\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Exemplo 3: Se A é ortogonal, então $\det(A) = \pm 1$, pois como $A^T A = Id$, então

$$1 = \det(Id) = \det(A^T A) = \det(A)\cdot\det(A^T)$$
$$= \det(A)\cdot\det(A) = [\det(A)]^2. \quad \blacksquare$$

Produto Vetorial.

Em $\mathbb{R}^3$, há uma maneira prática de calcular complementos ortogonais de planos.

Teorema: Sejam $u = (u_1, u_2, u_3)$, $v = (v_1, v_2, v_3)$ vetores de $\mathbb{R}^3$. O vetor

$$(u_2v_3 - u_3v_2 \,,\, -u_1v_3 + u_3v_1 \,,\, u_1v_2 - u_2v_1) = w$$

é ortogonal a u e a v.

Dem: $\langle (u_1, u_2, u_3), (u_2v_3 - u_3v_2, -u_1v_3 + u_3v_1, u_1v_2 - u_2v_1) \rangle$

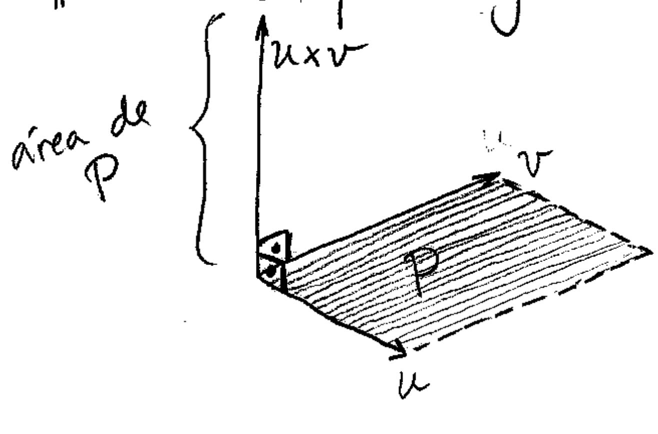
$$= \cancel{u_1u_2v_3} - \cancel{u_1u_3v_2} - \cancel{u_2u_1v_3} + \cancel{u_2u_3v_1} + \cancel{u_3u_1v_2} - \cancel{u_3u_2v_1}$$

analogamente para v.

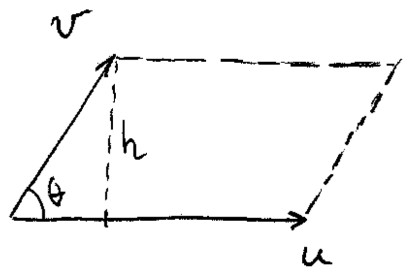
Definição: o vetor definido no teorema anterior é chamado produto vetorial de u e v e é simbolizado por $u \times v$.

Propriedades do Produto Vetorial:

1) $\|u \times v\| =$ área do paralelogramo de lados u e v.



<u>Dem:</u>



Area = $\|u\| \cdot h$

$$\text{Área}^2(P) = \|u\|^2 \cdot h^2 = \|u\|^2 \cdot \|v\|^2 \cdot \operatorname{sen}^2\theta$$
$$= \|u\|^2 \cdot \|v\|^2 - \|u\|^2 \cdot \|v\|^2 \cos^2\theta$$
$$= \|u\|^2 \cdot \|v\|^2 - \langle u, v\rangle^2$$
$$= (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2)(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) - (u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3)^2$$
$$= \dots = (u_2v_3 - u_3v_2)^2 + (u_3v_1 - u_1v_3)^2 + (u_1v_2 - u_2v_1)^2.$$

2) $u \times v = 0$ se, e somente se, $u = \lambda v$ (com $u, v \neq 0$).

<u>Dem</u>. Segue diretamente do anterior, pois a área de P é nula se e somente se u e v são paralelos.

Uma "fórmula" para $u \times v$:

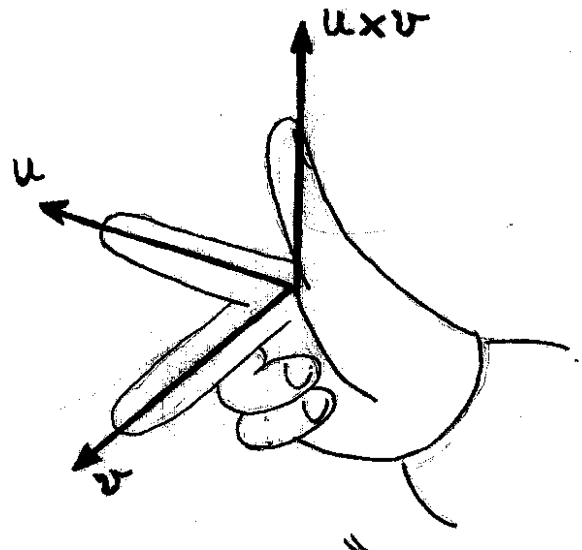
$$\boxed{u \times v = \det \begin{bmatrix} i & j & k \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix}}$$

Disso segue diretamente:

3) $u \times v = -v \times u$

4) $\det \begin{bmatrix} — u — \\ — v — \\ — u \times v — \end{bmatrix} \geq 0$

<u>Dem</u>: exercício.



"REGRA DA MÃO DIREITA"